



**ЗОВНІШНЄ  
НЕЗАЛЕЖНЕ  
ОЦІНЮВАННЯ**

**2013**

Є. П. Нелін

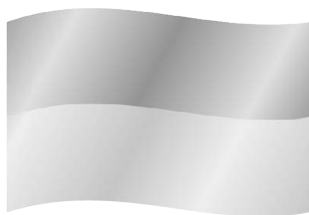
# **МАТЕМАТИКА**

## **ЕКСПРЕС-ПІДГОТОВКА**

- Основні поняття, формули, властивості в опорних таблицях
- Методи та приклади розв'язання
- Типові тестові завдання за темами курсу
- Три тести у форматі ЗНО
- Відповіді до ВСІХ завдань

**Якісна підготовка до ЗНО-2013**

Створено провідними фахівцями України  
в галузі загальної середньої освіти



**ЗОВНІШНЄ  
НЕЗАЛЕЖНЕ  
ОЦІНЮВАННЯ**

**2013**

**Є. П. Нелін**

# **МАТЕМАТИКА**

## **ЕКСПРЕС-ПІДГОТОВКА**

*5-те видання, перероблене і доповнене*

- Основні поняття, формули, властивості в опорних таблицях
- Методи та приклади розв'язання
- Типові тестові завдання за темами курсу
- Три тести у форматі ЗНО
- Відповіді до ВСІХ завдань

---

**Якісна підготовка до ЗНО-2013**



УДК [51:371.275](076.3)  
ББК 74.262.21  
Н49

Серія «Зовнішнє незалежне оцінювання»

Рецензенти:

*Л. Г. Стадник*, учитель математики вищої кваліфікаційної категорії  
Харківської ЗОШ № 17, учитель-методист;

*О. А. Олексюк*, методист науково-методичного центру природничо-математичної освіти  
Інституту післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка;

*М. Є. Руденко*, вчитель математики спеціалізованої школи № 24  
Шевченківського району м. Києва, вчитель-методист;

*О. І. Бормотова*, методист Інституту післядипломної освіти Севастопольського міського гуманітарного  
університету, учитель математики вищої кваліфікаційної категорії  
ЗОШ № 14 м. Севастополя, учитель-методист

**Нелін Є. П.**

Н49 Математика. Експрес-підготовка / Є. П. Нелін.— 5-те вид., перероб. і доп.— К.: Літера  
ЛТД, 2013.— 240 с.— (Зовнішнє незалежне оцінювання).

ISBN 978-966-178-393-4

Посібник призначений для ефективної підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики і відповідає програмі ЗНО.

Усі опорні факти шкільного курсу математики подано у формі таблиць, які містять основні теоретичні положення кожної теми й основні алгоритми та методи розв'язування відповідних задач.

Наведені тестові завдання аналогічні тим, що пропонуються на ЗНО. Для низки з них даються розв'язання та коментарі; завдання для самостійної роботи супроводжуються відповідями.

В окремому розділі подано тренувальні тести у форматі ЗНО, для яких також наведено відповіді.

Призначено для випускників загальноосвітніх навчальних закладів, абітурієнтів, студентів педагогічних ВНЗ, учителів математики.

УДК [51:371.275](076.3)

ББК 74.262.21

Навчальне видання

Серія «Зовнішнє незалежне оцінювання»

*НЕЛІН Євген Петрович*

**МАТЕМАТИКА. Експрес-підготовка**

*5-те видання, перероблене і доповнене*

Код Л0432У. Підписано до друку 14.09.2012. Формат 84×108/16. Папір друкарський.

Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 25,2.

Видавництво «Літера ЛТД». 03680 м. Київ, вул. Нестерова, 3, оф. 508.

Тел. для довідок (044) 456-40-21. Свідоцтво про держреєстрацію № 923 від 22.05.2002 р.

З питань реалізації звертатися за тел.: у Харкові – (057) 712-91-44, 712-90-87; Києві – (044) 599-14-53, 377-73-23;

Білій Церкві – (04563) 3-38-90; Вінниці – (0432) 55-61-10, 27-70-08; Дніпропетровську – (056) 785-01-74, 789-06-24;

Донецьку – (062) 344-38-38; Житомирі – (0412) 41-27-95, 44-81-82; Івано-Франківську – (0342) 72-41-54;

Кривому Розі – (056) 401-27-11; Луганську – (0642) 53-34-51; Львові – (032) 244-14-36;

Миколаєві і Одесі – (048) 737-46-54; Сімферополі – (0652) 54-21-38; Тернополі – (0352) 49-58-36;

Хмельницькому – (0382) 70-63-16; Черкасах – (0472) 51-22-51, 36-72-14; Чернігові – (0462) 62-27-43.

«Книга поштою»: 61045 м. Харків, а/с 3355. Тел. (057) 717-74-55, (067) 546-53-73.

E-mail: [pochta@ranok.com.ua](mailto:pochta@ranok.com.ua)

[www.ranok.com.ua](http://www.ranok.com.ua)

ISBN 978-966-178-393-4

© Є. П. Нелін, 2009–2012

© «Літера ЛТД», 2013

# ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник призначений для ефективної підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики. Посібник написано автором на основі багаторічного досвіду використання тестових технологій у навчальному процесі та при відборі майбутніх студентів.

*Структура навчального посібника відповідає формату та програмі ЗНО з математики.* У книзі наведено *основні опорні факти* з розділів, що входять до програми: числа та вирази; рівняння та нерівності; функції; елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики; планіметрія; стереометрія. Наводяться *приклади тестових завдань та їх розв'язання, завдання для самостійної роботи.* В окремому розділі посібника подано *варіанти тестів за специфікацією 2009–2011 рр. і 2012 р.*, наведено також *зразки бланків відповідей.*

Для зручності всі *опорні факти* шкільного курсу математики подано *у формі таблиць*, що містять *основні теоретичні положення* кожної теми, а також *основні алгоритми та методи розв'язання задач* з відповідних тем.

У кожному розділі наведено *тестові завдання для самостійної роботи.* При цьому спочатку пропонується завдання, для якого розглянуто метод розв'язування, а після цього — серія завдань, що розв'язуються тим самим або аналогічним методом.

Готуючись до ЗНО з математики, слід враховувати структуру та зміст тесту. Тест, що був запропонований під час ЗНО у 2012 р., складався із 32 завдань. Їх орієнтовне розподілення за змістовими лініями подано в таблиці.

На виконання тесту відведено 150 хвилин.

До тесту ЗНО з математики включені завдання трьох різних форм: завдання з вибором однієї правильної відповіді; завдання на встановлення відповідності; завдання відкритої форми з короткою відповіддю.

**1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді.** До кожного з таких завдань пропонується 5 варіантів відповідей, серед яких *лише одна є правильною.* Із запропонованих відповідей слід *вибрати правильну та певним чином* (див. нижче) *позначити її у бланку відповідей А.*

Навчальний предмет	Змістові лінії	Кількість завдань*		
		Завдання з вибором правильної відповіді	Завдання на встановлення відповідності	Завдання з короткою відповіддю
Алгебра і початки аналізу	Числа та вирази	4	1	1
	Рівняння та нерівності	3	–	3
	Функції	4	1	1
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	1
Геометрія	Планіметрія	4	1	1
	Стереометрія	4	1	1
	<i>Усього</i>	20	4	8

\* У таблиці наведено розподіл завдань тесту за змістовими лініями в тренувальному варіанті.

За виконання кожного із завдань 1–20 учасник тестування може отримати **0 балів** або **1 бал**.

*Завдання вважатиметься виконаним правильно й учасник отримує 1 бал, якщо обрано та певним чином позначено у бланку А правильний варіант відповіді.*

*Завдання вважатиметься виконаним неправильно й учасник отримує 0 балів, якщо у бланку А:*

- а) позначено неправильний варіант відповіді;
- б) позначено два або більше варіантів відповіді, навіть якщо поміж них є правильний;
- в) не позначено жодного варіанта відповіді.

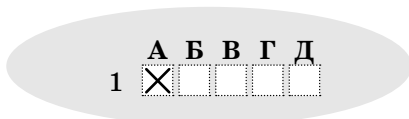
**Приклад 1.** Обчисліть:  $\sqrt[3]{27 \cdot 0,008}$ .

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,2	0,006	3	0,06

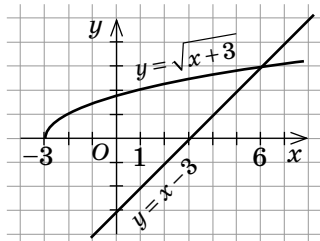
*Розв'язання.* Оскільки  $27 = 3^3$  і  $0,008 = 0,2^3$ , то  $\sqrt[3]{27 \cdot 0,008} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{0,008} = 3 \cdot 0,2 = 0,6$ .

Отже, правильна відповідь А.

*Зразок позначення відповіді в бланку А:*



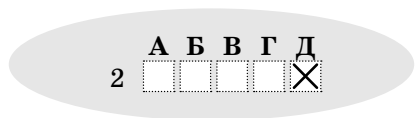
**Приклад 2.** Нарисунку зображено графіки функцій  $y = \sqrt{x+3}$  і  $y = x-3$ . Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність  $\sqrt{x+3} \leq x-3$ .



А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 6)$	$[-3; 6)$	$[-3; 6]$	$(6; +\infty)$	$[6; +\infty)$

*Розв'язання.* Для функцій  $f(x) = \sqrt{x+3}$  і  $g(x) = x-3$ , що задані графіками, нерівність  $f(x) < g(x)$  виконуватиметься для тих і тільки для тих значень аргументу, для яких графік функції  $f(x)$  розташований нижче, ніж графік функції  $g(x)$ . Аналізуючи задані графіки, бачимо, що це буде при  $x \in (6; +\infty)$ . Але задана нерівність не є строгою, тому її задовольнятимуть і ті значення аргументу, при яких  $f(x) = g(x)$ , тобто  $x = 6$ . Таким чином, нерівність  $\sqrt{x+3} \leq x-3$  виконуватиметься для всіх  $x \in [6; +\infty)$ . Отже, правильна відповідь Д.

*Зразок позначення відповіді в бланку А:*



**2. Завдання на встановлення відповідності (логічні пари).** До кожного завдання у двох колонках подано інформацію, яку позначено цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Виконуючи завдання, необхідно встановити відповідність інформації, позначеної цифрами і буквами (утворити логічні пари). За кожну правильно позначену логічну пару учасник отримує **1 бал**. Отже, максимальна кількість балів за повністю правильно виконане завдання становить **4 бали**.

*Відповідність вважатиметься встановленою правильно й учасник отримує 1 бал, якщо для обраної інформації, позначеної цифрою, правильно визначено відповідну інформацію, позначену буквою, і результат певним чином позначено у бланку відповідей А.*

*Відповідність вважатиметься встановленою неправильно й учасник отримує 0 балів, якщо у бланку А:*

- а) для розглядуваної цифри позначено неправильний варіант відповіді;
- б) для розглядуваної цифри позначено два або більше варіантів відповіді, навіть якщо поміж них є правильний;
- в) для розглядуваної цифри не позначено жодного варіанта відповіді.

**П р и к л а д 3.** Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тожно дорівнюють (А–Д).

- |   |                |   |                 |
|---|----------------|---|-----------------|
| 1 | $(3a-b)^2$     | А | $9a^2-b^2$      |
| 2 | $(3a-b)(b+3a)$ | Б | $9b^2-2ab+a^2$  |
| 3 | $(a-3b)^2$     | В | $3a^2+8ab-3b^2$ |
| 4 | $(a+3b)(3a-b)$ | Г | $9a^2-6ab+b^2$  |
|   |                | Д | $9b^2-6ab+a^2$  |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

**Розв'язання**

Перетворюючи вираз, який позначено цифрою 1:  $(3a-b)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$ , — одержуємо вираз, який позначено буквою Г. Отже, цифри 1 у лівій колонці відповідає буква Г у правій колонці, тобто позначку слід поставити на перетині відповідних рядків – цифри 1 і колонки з буквою Г (див. зразок позначення відповіді в бланку А нижче).

Аналогічно, використовуючи відповідні формули, одержуємо:  $(3a-b)(b+3a) = 9a^2 - b^2$ , отже, цифри 2 відповідає буква А;  $(a-3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2 = 9b^2 - 6ab + a^2$ , отже, цифри 3 відповідає буква Д;  $(a+3b)(3a-b) = 3a^2 - ab + 9ab - 3b^2 = 3a^2 + 8ab - 3b^2$ , отже, цифри 4 відповідає буква В.

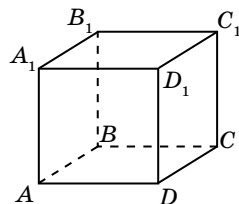
**Зразок позначення відповіді в бланку А:**

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2	×				
3					×
4			×		

**Зауваження.** Слід враховувати, що в правій колонці букв на одну більше, ніж цифр в лівій колонці, тому в усіх таких завданнях одна буква залишається не позначеною (у наведеному прикладі це буква Б).

**П р и к л а д 4.** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між заданими кутами (1–4) та їхніми градусними мірами (А–Д).

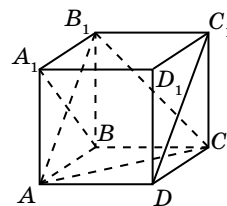
- |   |                                 |   |            |
|---|---------------------------------|---|------------|
| 1 | Кут між прямими $DD_1$ і $AB_1$ | А | $0^\circ$  |
| 2 | Кут між прямими $DC_1$ і $CB_1$ | Б | $30^\circ$ |
| 3 | Кут між прямими $AD$ і $B_1C_1$ | В | $45^\circ$ |
| 4 | Кут між прямими $A_1B$ і $DC_1$ | Г | $60^\circ$ |
|   |                                 | Д | $90^\circ$ |



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

**Розв'язання**

1. У заданому кубі  $DD_1 \parallel AA_1$ , тому  $\angle (DD_1; AB_1) = \angle (AA_1; AB_1) = \angle A_1AB_1 = 45^\circ$  (як кут між стороною квадрата  $ABB_1A_1$  та його діагоналлю) (див. рисунок нижче). Отже, цифри 1 у лівій колонці відповідає буква В у правій колонці.



2. Оскільки в заданому кубі  $AB_1 \parallel DC_1$ , то  $\angle (DC_1; CB_1) = \angle (AB_1; CB_1) = \angle AB_1C = 60^\circ$  (як кут рівностороннього трикутника  $AB_1C$ ), отже, цифри 2 відповідає буква Г.

3. Оскільки  $AD \parallel B_1C_1$ , то  $\angle (AD; B_1C_1) = 0^\circ$  (кут між паралельними прямими вважається рівним  $0^\circ$ ), отже, цифри 3 відповідає буква А.

4. Оскільки в заданому кубі  $AB_1 \parallel DC_1$ , то  $\angle (A_1B; DC_1) = \angle (A_1B; AB_1) = 90^\circ$  (як кут між діагоналями квадрата  $ABB_1A_1$ ), отже, цифри 4 відповідає буква Д.

**Зразок позначення відповіді в бланку А:**

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2				×	
3	×				
4					×

**3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю.** У результаті виконання кожного з таких завдань отриманий числовий результат потрібно вписати у вигляді цілого числа або десяткового дроби в бланк відповідей А згідно з вимогами його заповнення (див. нижче). У бланк відповідей вписується лише числова відповідь, причому у тих одиницях величини, що зазначені в умові завдання. Слід пам'ятати, що розв'язання завдань у чернетці не перевіряються і до уваги не беруться.

За виконання кожного такого завдання учасник тестування може отримати **0 балів** або **2 бали**.

*Завдання вважатиметься виконаним правильно й учасник отримує 2 бали*, якщо у бланку А правильно розміщено правильну відповідь.

*Завдання вважатиметься виконаним не правильно й учасник отримує 0 балів*, якщо у бланку А:

- записано неправильну відповідь;
- неправильно розміщено правильну відповідь;
- не записано відповідь.

**Приклад 5.** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{2x^2 - 25} = x$ . Якщо рівняння має декілька коренів, запишіть їхню суму.

*Розв'язання.* Після піднесення обох частин заданого рівняння до квадрата одержуємо:

$$2x^2 - 25 = x^2; \quad x^2 = 25; \quad x = \pm 5.$$

Підставляючи одержані корені в задане рівняння, отримуємо, що  $x = 5$  — корінь рівняння (одержуємо правильну рівність  $5 = 5$ ), а  $x = -5$  є стороннім коренем (одержуємо неправильну рівність  $5 = -5$ ). Отже, до відповіді слід записати тільки число 5. Відповідь: 5.

*Зразок запису відповіді в бланку А:*

5     5,

**Приклад 6.** Знайдіть площу трапеції, якщо її діагоналі дорівнюють 6 см і 7 см, а кут між ними становить  $30^\circ$ .

*Розв'язання.* Оскільки площа довільного чотирикутника дорівнює півдобутку його діагоналей на синус кута між ними, то отримуємо:

$$S_{\text{трапеції}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже, до відповіді слід записати число 10,5.

Відповідь: 10,5.

*Зразок запису відповіді в бланку А:*

6    1 0, 5

Таким чином, у 2012 р. учасник, який правильно розв'язав усі завдання тесту та правильно записав відповіді у бланку А, отримує максимальну кількість балів — **52**.

*Для підготовки до розв'язування завдань теста ЗНО з математики радимо використати ще й таку літературу.*

- Зовнішнє незалежне оцінювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів. 2008 р.: Інформаційні матеріали / Український центр оцінювання якості освіти / Уклад. І. Л. Лікарчук (наук. ред.) та ін.— К.: УЦОЯО, 2007.— 288 с.
- Нелін Є. П., Дворецька Л. П., Прокопенко Н. С., Горох В. П., Добосевич М. С., Захарійченко Ю. О., Гриневич Л. М., Пильник Т. О., Серeda Л. І. Зовнішнє оцінювання з математики. Інформаційні матеріали.— К.: УЦОЯО, 2006.— 40 с.
- Горох В. П., Бабич Ю. П., Вартачан Г. М., Захарійченко Ю. О., Ільїна С. М., Нелін Є. П., Роганін О. М. Математика. Комплексна підготовка.— Х., 2011.— 327 с.
- Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів (академіч. та профільн. рівні).— Х., 2010.— 416 с.
- Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра. 11 клас: Підруч. для загальноосвіт. навч. закладів (академіч. і профільн. рівні).— Х., 2011.— 416 с.
- Нелін Є. П. Геометрія в таблицях: Навч. посіб. для учнів 7–11 кл.— Х., 1996–2011.— 64 с.
- Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: Навч. посіб. для учнів 7–11 кл.— Х., 1998–2011.— 112 с.

*Бажаємо успіхів!*

## Розділ 1

**ЧИСЛА ТА ВИРАЗИ****Основні поняття, формули, властивості  
до розділу 1 «Числа та вирази»**Таблиця 1. **ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНОСТЕЙ І НЕРІВНОСТЕЙ**

Властивості числових рівностей	Властивості числових нерівностей
1. Якщо $a = b$ , то $b = a$	1. Якщо $a > b$ , то $b < a$
2. Якщо $a = b$ і $b = c$ , то $a = c$ (транзитивність рівності)	2. Якщо $a > b$ і $b > c$ , то $a > c$ (транзитивність нерівності)
3. Якщо $a = b$ , то $a + c = b + c$	3. Якщо $a > b$ , то $a + c > b + c$
4. Якщо $a = b$ і $c = d$ , то $a + c = b + d$	4. Якщо $a > b$ і $c > d$ , то $a + c > b + d$
5. Якщо $a = b$ і $c \neq 0$ , то $ac = bc$	5. а) Якщо $a > b$ і $c > 0$ , то $ac > bc$ б) Якщо $a > b$ і $c < 0$ , то $ac < bc$
6. Якщо $a = b$ і $c = d$ , то $ac = bd$	6. Якщо $a > b$ ( $a > 0, b > 0$ ) і $c > d$ ( $c > 0, d > 0$ ), то $ac > bd$
7. Якщо $a = b$ , то $a^n = b^n$	7. а) Якщо $a > b$ ( $a > 0, b \geq 0$ ), то $a^{2k} > b^{2k}$ б) Якщо $a > b$ , то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$
8. а) Якщо $a = b$ ( $a \geq 0, b \geq 0$ ), то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Якщо $a = b$ , то $\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$	8. а) Якщо $a > b$ ( $a > 0, b > 0$ ), то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Якщо $a > b$ , то $\sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$
9. Якщо $a = b$ ( $a \neq 0, b \neq 0$ ), то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Якщо $a > b$ ( $a > 0, b > 0$ ), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. $ab = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ або $b = 0$	10. а) $ab > 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b > 0$ або $a < 0$ і $b < 0$ б) $ab < 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b < 0$ або $a < 0$ і $b > 0$



<p>11. <math>\frac{a}{b} = 0</math> тоді і тільки тоді, коли <math>a = 0</math> і <math>b \neq 0</math></p>	<p>11. а) <math>\frac{a}{b} &gt; 0</math> тоді і тільки тоді, коли <math>a &gt; 0</math> і <math>b &gt; 0</math> або <math>a &lt; 0</math> і <math>b &lt; 0</math></p> <p>б) <math>\frac{a}{b} &lt; 0</math> тоді і тільки тоді, коли <math>a &gt; 0</math> і <math>b &lt; 0</math> або <math>a &lt; 0</math> і <math>b &gt; 0</math></p>
---	---

Таблиця 2. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ

СИМВОЛІЧНИЙ ЗАПИС	ФОРМУЛЮВАННЯ	ПРИКЛАД
<b>Основна властивість дроби</b>		
1. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \quad (m \neq 0)$	Значення дроби не зміниться, якщо чисельник та знаменник дроби помножити або поділити на одне і те саме число, яке не дорівнює нулю	$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$
2. $\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b} \quad (m \neq 0)$	Скоротити дріб означає поділити чисельник і знаменник дроби на спільний дільник (відмінний від одиниці)	$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ (поділили чисельник і знаменник на 3)
<b>Додавання та віднімання дробів</b>		
3. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	Якщо знаменники дробів рівні, то чисельники додають (віднімають), а знаменник зберігається	$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
4. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	Якщо знаменники дробів різні, то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім додають (віднімають) одержані дроби з рівними знаменниками	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{35} + \frac{3 \cdot 5}{35} = \frac{14+15}{35} = \frac{29}{35}$
<b>Множення дробів</b>		
5. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	При множенні дробів у чисельнику записують добуток чисельників, а в знаменнику — добуток знаменників	$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$
6. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$	При множенні дроби на ціле число в чисельнику записують добуток чисельника на це число, а знаменник зберігається (можна також ціле число подати як дріб із знаменником 1)	$\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 1} = \frac{6}{7}$

Закінчення таблиці 2

Ділення дробів		
7. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ( $c \neq 0$ )	При діленні дробів можна перший дріб помножити на дріб, обернений до другого	$\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$
Піднесення дробу до степеня		
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	При піднесенні дробу до степеня окремо підносять до цього степеня чисельник і знаменник дробу	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$
Порівняння дробів		
9. З двох дробів з однаковими знаменниками більший той, у якого чисельник більший		$\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ , оскільки $5 < 7$
10. Якщо знаменники дробів різні, то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім порівнюють одержані дробі з рівними знаменниками		Порівняти $\frac{2}{3}$ і $\frac{7}{10}$ . $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$ , $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$ . Оскільки $\frac{20}{30} < \frac{21}{30}$ , то $\frac{2}{3} < \frac{7}{10}$
11. З двох дробів з рівними чисельниками більший той, у якого знаменник менший		$\frac{7}{11} > \frac{7}{15}$ , оскільки $11 < 15$

Таблиця 3. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ І ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ

Означення	Приклад
Ціле число $a$ ділиться на ціле число $b$ ( $b \neq 0$ ), якщо існує таке ціле $c$ , що $a = bc$ . Подільність можна позначати так: $a : b$	$24 : 8$ , оскільки існує таке ціле число 3, що $24 = 8 \cdot 3$
Властивості	
1. Якщо $a : b$ і $b : c$ , то $a : c$ (транзитивність подільності)	$48 : 12$ і $12 : 6$ , отже, $48 : 6$
2. Якщо $a : c$ і $b : c$ , $m$ і $n$ — будь-які цілі числа, то $(ma + nb) : c$ Частковий випадок ( $m = 1, n = \pm 1$ ) Якщо $a : c$ і $b : c$ , то $(a \pm b) : c$ Якщо кожний доданок ділиться на $c$ , то їх алгебраїчна сума також ділиться на $c$	$77 : 11$ і $22 : 11$ , тоді $77 + 22 = 99 : 11$ ; $77 - 22 = 55 : 11$

3. Якщо $a : b$ і $k \neq 0$ , то $ak : bk$	$6 : 3$ , тоді $(6 \cdot 5) : (3 \cdot 5)$ , тобто $30 : 15$	
4. Якщо $a : b$ і $a : c$ , причому $b$ і $c$ — взаємно прості числа (тобто їх НСД дорівнює одиниці), то $a : bc$	48 ділиться на 3 і на 8 (3 і 8 — взаємно прості числа), тоді 48 ділиться на $3 \cdot 8 = 24$	
Ознаки подільності		
НА ЯКЕ ЧИСЛО ДІЛИМО	ОЗНАКА	ПРИКЛАД
На 2	Остання цифра числа ділиться на 2 (парна). Ціле число $n$ , що ділиться на 2, називається <b>парним</b> , і його можна подати у вигляді $n = 2k$ , де $k \in \mathbb{Z}$ . Ціле число $n$ , що не ділиться на 2, називається <b>непарним</b> , і його можна подати у вигляді $n = 2k + 1$ , де $k \in \mathbb{Z}$	$956 : 2$ , оскільки остання цифра 6 парна ( $6 : 2$ ); $2003 \not\div 2$ , оскільки остання цифра 3 непарна
На 5	Остання цифра числа дорівнює 0 або 5	$375 : 5$ ; $8500 : 5$
На $10^k$	Число закінчується на $k$ нулів	$482\,900\,000 : 10^5$
На 4	Число, виражене двома останніми цифрами заданого числа, ділиться на 4	$35\,724 : 4$ , оскільки $24 : 4$
На 8	Число, виражене трьома останніми цифрами заданого числа, ділиться на 8	$17\,328 : 8$ , оскільки $328 : 8$
На 3	Сума цифр числа ділиться на 3	$9822 : 3$ , оскільки $9 + 8 + 2 + 2 = 21 : 3$
На 9	Сума цифр числа ділиться на 9	$15\,732 : 9$ , оскільки $1 + 5 + 7 + 3 + 2 = 18 : 9$
На 11	Різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях (рахуючи справа наліво), ділиться на 11	$24\,836\,273 : 11$ , оскільки $(3 + 2 + 3 + 4) - (7 + 6 + 8 + 2) = -11 : 11$

Таблиця 4. ПРОСТІ ТА СКЛАДЕНІ ЧИСЛА

Означення	Приклад
Натуральне число $p$ називається <b>простим</b> , якщо в нього тільки два натуральних дільника — 1 і саме число $p$	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... — прості числа
Натуральне число називається <b>складеним</b> , якщо воно має більше двох натуральних дільників	6, 15, 130, 998, ... — складені числа (наприклад, 6, крім дільників 1 і 6, ще має дільники 2 і 3)
1 не є ні простим числом, ні складеним	

Закінчення таблиці 4

Основна теорема теорії подільності		
ФОРМУЛЮВАННЯ	ЗАПИС У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ	ПРИКЛАД
Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку співмножників	$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$ , де $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ — прості числа	$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
	$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа, де $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ — прості числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ — натуральні числа	$792 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^1$

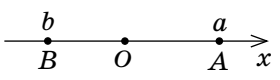
Таблиця 5. ПРОПОРЦІЇ

Означення	
<i>Пропорцією називається рівність двох числових відношень (відношенням називають частку від ділення одного числа на інше)</i>	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , або $a : b = c : d$ ( $a, b, c, d \neq 0$ )	$a$ і $d$ — крайні члени пропорції; $b$ і $c$ — середні члени пропорції. Кожний член пропорції називається четвертим пропорційним відносно інших трьох
Властивості	
1. $ad = bc$	Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів
2. $a = \frac{bc}{d}$ ; $d = \frac{bc}{a}$	Кожний крайній член пропорції дорівнює добутку її середніх членів, поділеному на інший крайній член
3. $b = \frac{ad}{c}$ ; $c = \frac{ad}{b}$	Кожний середній член пропорції дорівнює добутку її крайніх членів, поділеному на інший середній член
4. Одночасно справджуються такі пропорції: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ ; $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$	У кожній пропорції можна поміняти місцями або лише середні члени, або лише крайні, або і ті, й інші одночасно
Похідні пропорції	
Якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — правильна пропорція, то правильними є і такі пропорції: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ; $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ; $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ; $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ ; $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ ; $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$	

Таблиця 6. **ВІДСОТКИ**

Означення	
<p><b>Відсотком</b> називається сота частина цілого (яке береться за одиницю):</p> <p style="text-align: center;">1 % від числа <math>a</math> дорівнює <math>\frac{1}{100}a</math></p>	
Основні задачі на відсотки	
1. ЗНАХОДЖЕННЯ ВІДСОТКА ВІД ЧИСЛА	
<p><math>p</math> % від числа <math>a</math> дорівнює <math>\frac{p}{100}a</math></p>	<p><i>Приклад.</i> Знайти 7 % від числа 300.  <i>Розв'язання.</i> <math>\frac{7}{100} \cdot 300 = 21</math></p>
2. ЗНАХОДЖЕННЯ ЧИСЛА ЗА ЗАДАНИМ ЗНАЧЕННЯМ ЙОГО ВІДСОТКА	
<p>Якщо <math>p</math> % від якогось числа дорівнює <math>b</math>, то це число дорівнює:</p> $b : \frac{p}{100} = \frac{b \cdot 100}{p}$	<p><i>Приклад.</i> Знайти число, 30 % якого дорівнює 24.  <i>Розв'язання.</i> Шукане число <math>x</math> є розв'язком рівняння <math>\frac{30}{100} \cdot x = 24</math>, звідки <math>x = 24 : \frac{30}{100} = 80</math></p>
3. ЗНАХОДЖЕННЯ ВІДСОТКОВОГО ВІДНОШЕННЯ ДВОХ ЧИСЕЛ	
<p>Число <math>a</math> становить <math>\frac{a}{b} \cdot 100</math> % від числа <math>b</math></p>	<p><i>Приклад.</i> Скільки відсотків становить число 26 від числа 65?  <i>Розв'язання.</i> Шукане число відсотків <math>x</math> задовольняє рівняння <math>\frac{x}{100} \cdot 65 = 26</math>, звідки <math>x = \frac{26}{65} \cdot 100 = 40</math> (%)</p>

Таблиця 7. **МОДУЛЬ ЧИСЛА**

Означення	Приклад
<p><i>Модулем додатного числа називається само це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю:</i></p> $ a  = \begin{cases} a & \text{при } a > 0 \\ 0 & \text{при } a = 0 \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0 \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a & \text{при } a > 0 \\ -a & \text{при } a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0 \\ -a & \text{при } a \leq 0 \end{cases}$	<p><math> -3  = 3;  5  = 5;  0  = 0;</math>  <math> a^4  = a^4</math> (оскільки <math>a^4 \geq 0</math>)</p>
Геометричний зміст модуля	
 <p><math> a  = OA;  b  = OB;</math>  <math> a - b  = AB</math></p>	<p><i>На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.</i></p> <p><i>Модуль різниці двох чисел <math>a</math> і <math>b</math> — це відстань між точками <math>a</math> і <math>b</math> на координатній прямій</i></p>

Закінчення таблиці 7

Властивості модуля	Формулювання	Приклад
1. $ a  \geq 0$	Модуль будь-якого числа — невід'ємне число	$ -5  \geq 0$
2. $ -a  =  a $	Модулі протилежних чисел рівні	$ -13  =  13 $
3. $a \leq  a $	Число не перевищує свого модуля	$-8 \leq  -8  = 8$
4. $ a \cdot b  =  a  \cdot  b $	Модуль добутку дорівнює добутку модулів	$ (-2) \cdot (-3)  =  -2  \cdot  -3 $
5. $\left  \frac{a}{b} \right  = \frac{ a }{ b }$ ( $b \neq 0$ )	Модуль дроби дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)	$\left  \frac{2}{3} \right  = \frac{ 2 }{ 3 } = \frac{2}{3};$ $\left  \frac{-7}{-12} \right  = \frac{ -7 }{ -12 } = \frac{7}{12}$
6. $ a^n  =  a ^n;$ $ a^2  = a^2;$ $ a^{2k}  = a^{2k}$	Модуль степеня числа дорівнює тому самому степеню модуля даного числа. Модуль парного степеня будь-якого числа дорівнює тому самому степеню даного числа	$ (-2)^3  =  -2 ^3 = 2^3 = 8;$ $ (-5)^2  =  -5 ^2 = 5^2 = 25;$ $ (-2)^4  =  -2 ^4 = 2^4 = 16$
7. $ a+b  \leq  a  +  b $	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків	
8. $  a  -  b   \leq  a \pm b  \leq  a  +  b $		

Таблиця 8. ДІЇ НАД ЧИСЛАМИ З ОДНАКОВИМИ ТА РІЗНИМИ ЗНАКАМИ

ПРАВИЛО	ПРИКЛАД
<b>Додавання та віднімання</b>	
При <i>додаванні чисел з однаковими знаками</i> їх модулі додаються, а перед сумою ставиться їх спільний знак	$15 + 23 = 38;$ $-18 + (-11) = -(18 + 11) = -29$
При <i>додаванні двох чисел з різними знаками</i> знаходять їх модулі й від більшого модуля віднімають менший, а перед результатом ставлять знак того числа, у якого модуль більший	$-15 + 23 = 23 - 15 = 8;$ $18 - 31 = 18 + (-31) = -(31 - 18) = -13$
<i>Віднімання двох чисел з різними знаками</i> замінюється додаванням зменшуваного і числа, протилежного від'ємнику	$16 - (-7) = 16 + 7 = 23;$ $-9 - (+5) = -9 + (-5) = -14$
<b>Множення та ділення</b>	
При <i>множенні</i> двох чисел їх модулі перемножують, а знак ставлять за вказаною схемою: $(+) \cdot (+) = +$ $(-) \cdot (-) = +$ $(+) \cdot (-) = -$ $(-) \cdot (+) = -$	$6 \cdot (-4) = -24;$ $-7 \cdot (-3) = 21;$ $-9 \cdot 2 = -18$
При <i>діленні</i> двох чисел модуль першого числа (діленого) ділять на модуль другого числа (діляника), а знак ставлять за такою схемою: $(+) : (+) = +$ $(-) : (-) = +$ $(+) : (-) = -$ $(-) : (+) = -$	$-30 : (-2) = 15;$ $-55 : 11 = -5;$ $72 : (-8) = -9$

Таблиця 9. СТЕПЕНІ

<b>Степінь з натуральним цілим показником</b>	
$a^1 = a$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N} (n \geq 2)$
$a^0 = 1$ $a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0, n \in \mathbf{N}$
<b>Степінь з дробовим показником</b>	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a \geq 0$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a > 0, n \in \mathbf{N} (n \geq 2), m \in \mathbf{Z}$

Закінчення таблиці 9

Властивості степенів		
Властивість	Приклад	Використання для зміни форми подання степенів
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^3 \cdot 3^2 = 3^5 = 243$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$	$7^6 : 7^4 = 7^{6-4} = 7^2 = 49$	$a^{m-n} = a^m : a^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1024$	$a^{mn} = (a^m)^n$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$	$a^n b^n = (ab)^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. При піднесенні <i>додатного числа до степеня</i> завжди одержуємо <i>додатне</i> число		$5^4 = 625$ — додатні числа $5^3 = 125$
7. Якщо піднести <i>від'ємне число до парного степеня</i> , то одержимо <i>додатне</i> число		$(-5)^4 = 5^4 = 625$ — додатні числа $(-1)^{20} = 1$
8. Якщо піднести <i>від'ємне число до непарного степеня</i> , то одержимо <i>від'ємне</i> число		$(-5)^3 = -5^3 = -125$ — від'ємні числа $(-1)^{11} = -1$

Таблиця 10. **ОДНОЧЛЕНИ ТА ДІЇ НАД НИМИ**

Означення	Приклад
<i>Одночленом</i> називається скінченний добуток чисел, букв та їхніх натуральних степенів, а також самі числа, букви та їхні степені. <i>Число 0 називається нульовим одночленом</i>	$0$ ; $3a^2x$ ; $-\frac{2}{3}ab^3$ ; $5$ ; $y$ ; $x^6$ — одночлени
<i>Степенем одночлена</i> називається сума показників букв, що входять в одночлен. Якщо одночленом є число, що не дорівнює нулю, то його степінь вважається рівним нулю. <i>Число 0 степеня не має</i>	$3a^3b^2c$ — одночлен шостого степеня ( $3+2+1=6$ ); $5ax^3$ — одночлен четвертого степеня ( $1+3=4$ ); $7$ — одночлен нульового степеня
Якщо до запису одночлена входить змінна $x$ у степені $k$ ( $x^k$ ), то говорять, що цей одночлен має по $x$ (або відносно $x$ ) степінь $k$	$5ax^3$ — одночлен третього степеня відносно змінної $x$



Одночлен записано <i>у стандартному вигляді</i> , якщо перший його множник є число, що називається <i>коефіцієнтом одночлена</i> , а далі стоять букви в деяких степенях, розташовані за алфавітом (латинським або грецьким)	$7a^5b^3c^6$ ; $-4xy^3z^2$ ; $3\alpha^2\beta\gamma^3$ — одночлени стандартного вигляду
Одночлени називаються <i>подібними</i> , якщо вони рівні між собою або розрізняються лише своїми коефіцієнтами	$4a^3b^2$ ; $-7a^3b^2$ ; $\frac{2}{3}a^3b^2$ — подібні одночлени
<b>Дії над одночленами</b>	
Додавання та віднімання	$3a^2 + ab + b^2 + 5a^2 - 3ab = 8a^2 - 2ab + b^2$
Множення	$(4a^3b^2c) \cdot (-2a^4bd) = -8a^7b^3cd$
Піднесення до степеня	$(2x^2y)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = 8x^6y^3$
Ділення	$(18a^6b^4c) : (3a^3b^2c) = \frac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c} = 6a^3b^2$

Таблиця 11. **МНОГОЧЛЕНИ**

Означення та зміст	Приклад
<i>Многочленом</i> називається алгебраїчна сума декількох одночленів (кожний з них називається членом многочлена). <i>Одночлени також вважаються многочленами, що складаються з одного члена.</i> <i>Число 0 називається нульовим многочленом</i>	$5a^2b + ab + 3$ ; $2x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлени (у другому многочлені: $-5x^2 = +(-5x^2)$ ); $0$ ; $2ax^2$ ; $7$ ; $x$ — многочлени, що складаються з одного члена
Якщо всі члени многочлена записані в стандартному вигляді та виконано зведення подібних доданків, то одержуємо <i>многочлен стандартного вигляду</i>	$3x^2 - 7x^2 + 2$ ; $2ab + b^2 - 9a^2$ — многочлени стандартного вигляду
<i>Степенем</i> ненульового многочлена називається найбільший степінь із степенів його членів (одночленів). <i>Нульовий многочлен (0) степеня не має</i>	$a^2 + abc - c^2$ — многочлен третього степеня (оскільки найбільший степінь у члена $abc$ — третій)
<b>Дії над многочленами</b>	
<b>ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ</b>	
При додаванні та відніманні многочленів використовують <i>правила розкриття дужок</i> (якщо розкривають дужки, перед якими стоїть знак «-», знаки всіх членів, що були в дужках, змінюються на протилежні)	$(2a^2 + 3ab - 5b) + (7a^2 - 4ab + 5b) = 2a^2 + 3ab - 5b + 7a^2 - 4ab + 5b = 9a^2 - ab$ ; $(4x - 3y) - (2x - 5y) = 4x - 3y - 2x + 5y = 2x + 2y$

Закінчення таблиці 11

МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ	
Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на цей одночлен і результати додати	$(x^2 - 4x) \cdot 3x^3 = x^2 \cdot 3x^3 - 4x \cdot 3x^3 = 3x^5 - 12x^4$
Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена й отримані добутки додати	$(a + 5b)(a - 2b) = a^2 - 2ab + 5ab - 10b^2 = a^2 + 3ab - 10b^2$
Щоб поділити многочлен на одночлен, потрібно розділити на цей одночлен кожний член многочлена й отримані частки додати	$\frac{12a^2b + 6ab^2}{3a} = \frac{12a^2b}{3a} + \frac{6ab^2}{3a} = 4ab + 2b^2$

Таблиця 12. РОЗКЛАД АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ НА МНОЖНИКИ

Формули скороченого множення	
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
Основні прийоми розкладання многочлена на множники	
Винесення спільного множника за дужки	$8a^3 + 10a^2b^3 - 6ab = 2a(4a^2 + 5ab^3 - 3b)$
Спосіб групування	$xy + 3yz - x^2 - 3xz = y(x + 3z) - x(x + 3z) = (x + 3z)(y - x)$
Використання формул скороченого множення	$a^4 - 64 = (a^2)^2 - 8^2 = (a^2 - 8)(a^2 + 8)$

Розклад на множники квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ )	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , де $x_1$ і $x_2$ — корені квадратного тричлена, тобто корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Оскільки $2x^2 + 3x - 5 = 0$ при $x_1 = 1$ і $x_2 = -\frac{5}{2}$ , то $2x^2 + 3x - 5 = 2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x - 1)(2x + 5)$
Узагальнення деяких формул скороченого множення	
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Приклади. $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ ; $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ . При $b = 1$ $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^2 + a + 1)$	
Для непарних натуральних $n$ $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Приклади. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ . При $b = 1$ (і $n = 2k + 1$ ) $a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \dots + a^2 - a + 1)$	

Таблиця 13. **КОРІНЬ  $n$ -ГО СТЕПЕНЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ**

Означення	
КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ	КОРІНЬ $n$ -ГО СТЕПЕНЯ
Квадратним коренем із числа $a$ називається таке число $b$ , квадрат якого дорівнює $a$ . Якщо $a = b^2$ , то $b$ — квадратний корінь із числа $a$ .	Коренем $n$ -го степеня із числа $a$ називається таке число $b$ , $n$ -й степінь якого дорівнює $a$ . Якщо $a = b^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ , $n \neq 1$ ), то $b$ — корінь $n$ -го степеня із числа $a$ .
Арифметичний корінь — невід’ємне значення кореня. При $a \geq 0$ : $\sqrt{a}$ , $\sqrt[n]{a}$ — позначення арифметичного значення кореня.	
$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$	$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}$
Область допустимих значень (ОДЗ)	
КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ	КОРІНЬ $n$ -ГО СТЕПЕНЯ
$\sqrt{a}$ існує тільки при $a \geq 0$	$\sqrt[k]{a}$ існує тільки при $a \geq 0$ ( $k \in \mathbb{N}$ ); $\sqrt[2k+1]{a}$ існує при будь-яких значеннях $a$

Властивості кореня $n$ -го степеня		
Основні формули для кореня $n$ -го степеня (тільки для невід'ємних значень $a$ і $b$ , тобто $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$ )	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких $a$ і $b$ з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — надано узагальнену формулу)	
	Корінь непарного степеня	Корінь парного степеня
1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	Можна	Тільки для невід'ємних $a$
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	Можна	$\sqrt[2k]{a^{2k}} =  a $
3. Корінь із кореня $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	Можна	Можна
4. Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ ----- і добуток коренів $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	Можна	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{ a } \sqrt[2k]{ b }$  Можна
5. Корінь із частки $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ( $b \neq 0$ ) ----- і частка коренів $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	Можна	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{ a }}{\sqrt[2k]{ b }}$  Можна
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ і навпаки ----- $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	Можна, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід <i>непарний</i> $\rightarrow$ <i>непарний</i> )	Перехід <i>парний</i> $\rightarrow$ <i>парний</i> , можна  Перехід <i>непарний</i> $\rightarrow$ <i>парний</i> $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m \geq 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m < 0 \end{cases}$  $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{ a^m }$
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$	Можна	$\sqrt[n]{a^n b} =  a  \sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	Можна	$a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{при } a \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b} & \text{при } a < 0, \end{cases}$ де $b \geq 0$

Таблиця 14. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Логарифм числа	
Означення	Приклади
<p><i>Логарифмом додатного числа <math>b</math> за основою <math>a</math> (<math>a &gt; 0</math>, <math>a \neq 1</math>) називається показник степеня, до якого треба піднести <math>a</math>, щоб одержати <math>b</math></i></p>	<p>1) <math>\log_4 16 = 2</math>, оскільки <math>4^2 = 16</math>;            2) <math>\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}</math>, оскільки <math>7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}</math>;            3) <math>\lg 1000 = 3</math>, оскільки <math>10^3 = 1000</math></p>
Основна логарифмічна тотожність	
$a^{\log_a b} = b$ $a > 0$ , $a \neq 1$ , $b > 0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$ ;                      2) $10^{\lg 2} = 2$
Властивості логарифмів і формули логарифмування ( $a > 0$ , $a \neq 1$ )	
1) $\log_a 1 = 0$	2) $\log_a a = 1$
ПРИ $x > 0$ , $y > 0$	УЗАГАЛЬНЕННЯ
3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	При $xy > 0$ $\log_a (xy) = \log_a  x  + \log_a  y $
4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	При $\frac{x}{y} > 0$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a  x  - \log_a  y $
5) $\log_a x^n = n \log_a x$	При $x \neq 0$ $\log_a x^{2k} = 2k \log_a  x $
Формула переходу до логарифмів з іншою основою	
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $a > 0$ , $a \neq 1$ , $b > 0$ , $b \neq 1$ , $x > 0$	
НАСЛІДКИ	
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Таблиця 15. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу									
<p><math>x^2 + y^2 = 1</math></p> <p><math>\cos \alpha = x</math> <math>\sin \alpha = y</math></p>		<p>Основна тригонометрична тотожність</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$							
		$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$		$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$		$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$		$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	
2. Тригонометричні функції подвійного аргументу									
$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$		$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$							
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$									
3. Значення тригонометричних функцій деяких аргументів									
$\alpha$	градуси	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
	радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0	
$\operatorname{ctg} \alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0	не існує	
4. Косинус різниці та суми									
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$									
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$									

5. Синус суми та різниці	
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$	
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$	
6. Тангенс суми та різниці	
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$
7. Формули суми та різниці тригонометричних функцій	
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$
8. Перетворення добутку тригонометричних функцій на суму	
$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$	
9. Формула перетворення виразу $a\sin\alpha + b\cos\alpha$	
$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$ <p style="text-align: center;">де аргумент <math>\varphi</math> визначається із співвідношень</p> $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	

Таблиця 16. ПРОГРЕСІЇ

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
<p><b>Означення.</b> Арифметичною прогресією називається <i>числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число.</i> Це постійне для даної послідовності число <math>d</math> називається <i>різницею арифметичної прогресії</i></p>	<p><b>Означення.</b> Геометричною прогресією називається <i>числова послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю.</i> Це постійне для даної послідовності число <math>q</math> називається <i>знаменником геометричної прогресії</i></p>
<b>ПРИКЛАДИ</b>	
<p>2, 5, 8, 11, 14, ... — <i>зростаюча</i> арифметична прогресія (<math>d = 3 &gt; 0</math>)</p>	<p>2, 6, 18, 54, 162, ... (<math>q = 3</math>);</p>
<p>18, 13, 8, 3, -2, ... — <i>спадна</i> арифметична прогресія (<math>d = -5 &lt; 0</math>)</p>	<p>16, -2, <math>\frac{1}{2}</math>, <math>-\frac{1}{8}</math>, <math>\frac{1}{32}</math>, ... (<math>q = -\frac{1}{4}</math>) — геометричні прогресії</p>
<b>ПОЗНАЧЕННЯ</b>	
<p><math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}</math> — арифметична прогресія <math>d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}</math> — <i>різниця</i> арифметичної прогресії</p>	<p><math>b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}</math> — геометрична прогресія <math>q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}}</math> — <i>знаменник</i> геометричної прогресії</p>
<b>ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ</b>	
<p><math>a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}</math> — арифметична прогресія <math>\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}</math></p> <p><i>Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному попереднього та наступного членів і навпаки; якщо виконується зазначена властивість, то послідовність буде арифметичною прогресією</i></p>	<p><math>b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}</math> — геометрична прогресія <math>\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}</math></p> <p><i>Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку попереднього та наступного членів і навпаки; якщо виконується зазначена властивість, то послідовність буде геометричною прогресією</i></p>
<b>ФОРМУЛИ <math>n</math>-ГО ЧЛЕНА</b>	
<p>1. <math>a_n = a_{n-1} + d</math> (за означенням)</p> <p>2. <math>a_n = a_1 + d(n-1)</math></p>	<p>1. <math>b_n = b_{n-1} \cdot q</math> (за означенням)</p> <p>2. <math>b_n = b_1 q^{n-1}</math></p>
<b>ФОРМУЛИ СУМИ <math>n</math> ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ</b>	
<p>1. <math>S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n</math></p> <p>2. <math>S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n</math></p>	<p>1. <math>S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1 - q}</math></p> <p>2. <math>S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}</math></p>



Орієнтовний план розв'язування задач на прогресії	
<p>1. Все, про що йдеться в умові задачі (члени прогресії, їх суми тощо), виражаємо через перший член і різницю (або знаменник) прогресії</p> <p>2. Складаємо рівняння (чи систему рівнянь) за умовою задачі. У випадку, коли в задачі відбувається перехід від геометричної прогресії до арифметичної і навпаки, для складання рівнянь звичайно використовують характеристичні властивості прогресій</p>	
Нескінченно спадна геометрична прогресія	
Означення	Приклади
<p>Нескінченна геометрична прогресія, знаменник якої за модулем менший від одиниці (<math> q  &lt; 1</math>), називається <i>нескінченно спадною геометричною прогресією</i></p>	<p><math>1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots \left( q = \frac{1}{2} \right)</math></p> <p><math>-2; \frac{2}{3}; -\frac{2}{9}; \frac{2}{27}; -\frac{2}{81}; \frac{2}{243}; \dots \left( q = -\frac{1}{3} \right)</math></p>
СУМА НЕСКІНЧЕННО СПАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ	
<p><b>Означення.</b> Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається границя, до якої прямує сума <math>n</math> її перших членів, при нескінченному зростанні <math>n</math> (<math>n \rightarrow \infty</math>)</p> $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$	
Формула для обчислення	Приклад
$S = \frac{b_1}{1 - q}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
Перетворення періодичного десяткового дробу на звичайний	
<p><i>Приклад.</i> <math>0,(6) = 0,6666\dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}</math> (як сума нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом <math>b_1 = \frac{6}{10}</math> і знаменником <math>q = \frac{1}{10}</math>)</p>	

## Тестові завдання до розділу 1 «Числа та вирази»

Завдання 1–85 мають по п'ять варіантів відповідей, із яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. У коробці містяться тільки червоні та сині олівці у відношенні 7:4. Укажіть число, яким може виражатися загальна кількість олівців у цій коробці.

А	Б	В	Г	Д
12	28	33	47	74

*Розв'язання.* Загальна кількість олівців, виражена в частинах, становить  $7 + 4 = 11$  (частин). Тоді загальна кількість олівців в коробці має ділитися на 11. З усіх наведених чисел на 11 ділиться тільки число 33. Отже, з наведених чисел загальна кількість олівців в коробці може виражатися тільки числом 33. Тобто правильна відповідь В.

2. У шаховому гуртку хлопців у п'ять разів більше, ніж дівчат. Укажіть число, яким може виражатися загальна кількість учнів у шаховому гуртку.

А	Б	В	Г	Д
16	15	14	13	12

3. Яку цифру потрібно поставити на місце (\*) у число  $\overline{5347*1}$ , щоб одержане число ділилося на 3?

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	8	9

*Розв'язання.* Число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3. Сума заданих цифр дорівнює 20. Додаючи до числа 20 запропоновані цифри, бачимо, що тільки у випадку А при додаванні цифри 1 ми одержуємо число 21, яке ділиться на 3. Тобто правильна відповідь А.

4. Яку цифру потрібно поставити на місце (\*) у число  $\overline{4367*8}$ , щоб одержане число ділилося на 9?

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	7	8

5. Банк сплачує своїм вкладникам 12 % річних. Визначте, скільки грошей потрібно покласти на рахунок, щоб через рік отримати 96 грн прибутку.

А	Б	В	Г	Д
120 грн	144 грн	800 грн	960 грн	1000 грн

Розв'язання. За умовою маємо:  $12\% \text{ — } 96 \text{ грн};$   $100\% \text{ — } x \text{ грн}.$  Тоді  $x = \frac{96 \cdot 100}{12} = 800 \text{ (грн)}.$

Отже, правильна відповідь В.

Також можна було міркувати так:  $12\% = 0,12$ , що становить 96 грн. Оскільки число за його дробом знаходиться за допомогою дії ділення, то потрібна сума дорівнює  $96 : 0,12 = 800 \text{ (грн)}.$

6. У результаті інфляції у державі  $N$  ціни зросли на 300 %. Визначте, на скільки відсотків потрібно знизити ціни, щоб повернути їх до попереднього рівня.

А	Б	В	Г	Д
600 %	300 %	100 %	75 %	50 %

7. У домашній бібліотеці Наталки було 40 книжок. Згодом їх стало 200. На скільки відсотків зросла кількість книжок у бібліотеці Наталки?

А	Б	В	Г	Д
160 %	200 %	250 %	300 %	400 %

8. Товар подешевшав на 25 %. На скільки відсотків більше можна купити товару на ту саму суму грошей?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4} \%$	$\frac{1}{3} \%$	25 %	75 %	$33\frac{1}{3} \%$

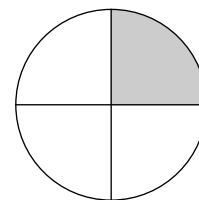
9. Банк сплачує своїм вкладникам 8 % річних. Визначте, скільки грошей треба покласти на рахунок, щоб через рік отримати 120 грн прибутку.

А	Б	В	Г	Д
2300	2100	1500	1900	1700

10. На скільки відсотків збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити на 100 % ?

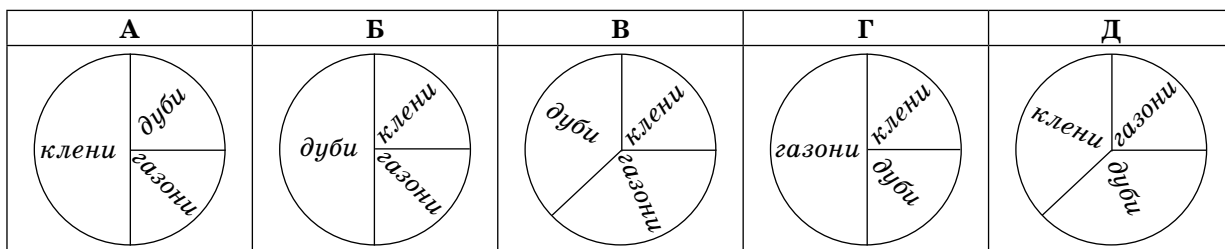
А	Б	В	Г	Д
100 %	200 %	400 %	700 %	800 %

11. На круговій діаграмі (заштрихована її частина) зображена та частина учнів класу, яка збирається проходити тестування з історії. Ця частина становить:



А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4} \%$	40 %	25 %	45 %	90 %

12. При закладці нового парку 50 % його площі відвели під посадку кленів, 50 % площі, що залишилася, — під посадку дубів, а решту площі — під газони. На якій з поданих діаграм правильно показано розподіл посадок?



13. Як зміниться величина дробу, якщо чисельник збільшити на 100 %, а знаменник зменшити на 50 %?

А	Б	В	Г	Д
Зменшиться в 4 рази	Зменшиться в 2 рази	Збільшиться в 1,5 рази	Збільшиться в 2 рази	Збільшиться в 4 рази

14. Якщо  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ , то  $c =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{ab}{a-b}$	$\frac{ab}{b-a}$	$a-b$	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$	$\frac{a-b}{ab}$

Розв'язання. Із заданої рівності  $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ . Зведемо дроби в правій частині рівності до спільного знаменника:  $\frac{1}{c} = \frac{a-b}{ab}$ . Звідси  $c = \frac{ab}{a-b}$ . Отже, правильна відповідь А.

15. Якщо  $y = \frac{2}{zx}$  (де  $x \neq 0$ ,  $z \neq 0$ ), то  $x =$

А	Б	В	Г	Д
$2yz$	$\frac{2y}{z}$	$\frac{2z}{y}$	$y - \frac{2}{z}$	$\frac{2}{yz}$

16. Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу  $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$(x-2)(x+2)^2$	$(x+2)(x-2)^2$	$(x^2+4)(x+2)$	$(x-4)(x+2)(x-1)$	$(x+4)(x-2)(x-1)$

*Розв'язання.* Сгрупуємо попарно члени даного виразу і винесемо за дужки спільні множники (а потім використаємо формулу різниці квадратів):

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2 - 4) = (x-2)(x-2)(x+2) = (x-2)^2(x+2).$$

Отже, правильна відповідь Б.

17. Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу  $x^4 + x^3 - x - 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(x+1)^2(x^2+x+1)$	$(x^2-x+1)(x-1)^2$	$(x-1)^3(x+1)$	$(x-1)(x+1)^3$	$(x^2-1)(x^2+x+1)$

18. Знайдіть значення виразу  $x^2 + 4x + 4$ , якщо  $x = \sqrt{7} - 2$ .

А	Б	В	Г	Д
7	-7	$15 - 4\sqrt{7}$	$15 + 4\sqrt{7}$	Інша відповідь

*Розв'язання.* Оскільки  $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ , то при  $x = \sqrt{7} - 2$  одержуємо  $(x+2)^2 = (\sqrt{7} - 2 + 2)^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$ . Отже, правильна відповідь А.

19. Знайдіть значення виразу  $x^2 - 6x + 9$ , якщо  $x = 3 - \sqrt{5}$ .

А	Б	В	Г	Д
-5	5	$13 - 4\sqrt{5}$	$13 + 4\sqrt{5}$	Інша відповідь

20. Спростіть вираз  $\frac{x^2 - 25}{x + 5} - \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$  при  $x \neq \pm 5$ .

А	Б	В	Г	Д
5	$2x - 5$	$2x + 5$	-5	$-2x - 5$

21. Задані числа:  $\sqrt{3}$ ; 1,3;  $\frac{5}{4}$ . Розташуйте їх у порядку зростання.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$ ; 1,3; $\frac{5}{4}$	1,3; $\sqrt{3}$ ; $\frac{5}{4}$	1,3; $\frac{5}{4}$ ; $\sqrt{3}$	$\frac{5}{4}$ ; $\sqrt{3}$ ; 1,3	$\frac{5}{4}$ ; 1,3; $\sqrt{3}$

*Розв'язання.* Оскільки  $\sqrt{3} \approx 1,7$ ;  $\frac{5}{4} = 1,25$  і  $1,25 < 1,3 < 1,7$ , то  $\frac{5}{4} < 1,3 < \sqrt{3}$ . Отже, правильна відповідь Д. Також можна було записати всі задані числа як значення квадратних коренів і порівнювати одержані числа, враховуючи, що корінь із більшого числа буде більшим числом (функція  $y = \sqrt{x}$  зростає).

22. Задані числа:  $\sqrt{5}$ ; 3,2;  $\frac{6}{7}$ . Розташуйте їх у порядку спадання.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{5}$ ; 3,2; $\frac{6}{7}$	3,2; $\sqrt{5}$ ; $\frac{6}{7}$	3,2; $\frac{6}{7}$ ; $\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$ ; $\frac{6}{7}$ ; 3,2	$\frac{6}{7}$ ; 3,2; $\sqrt{5}$

23. Якщо  $m = \frac{n^2}{4k}$  і  $n > 0$ , то  $n =$

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{mk}$	$4\sqrt{mk}$	$4mk$	$\frac{mk}{4}$	$\frac{\sqrt{mk}}{2}$

24. Обчисліть:  $\sqrt[3]{125 \cdot 0,027}$ .

А	Б	В	Г	Д
1,5	15	0,015	0,15	150

*Розв'язання.* Оскільки  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  (при всіх допустимих значеннях  $a$  і  $b$ ), то  $\sqrt[3]{125 \cdot 0,027} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{0,027} = 5 \cdot 0,3 = 1,5$  ( $\sqrt[3]{125} = 5$ , бо  $5^3 = 125$ ;  $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$ , бо  $0,3^3 = 0,027$ ). Тобто правильна відповідь А.

25. Обчисліть:  $\sqrt[4]{625 \cdot 0,0016}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	5,2	0,05	0,001	0,1

26. Обчисліть:  $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$ .

А	Б	В	Г	Д
0,18	0,006	3,2	0,6	0,06

27. Обчисліть:  $\sqrt[4]{0,0625 \cdot 81}$ .

А	Б	В	Г	Д
1,5	3,5	0,45	0,15	15

28. Спростіть вираз  $\sqrt[5]{2^{20}b^{15}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$2^{15}b^{10}$	$2^{100}b^{75}$	$2^4b^3$	$2^{25}b^{20}$	$2^5b^5$

29. Спростіть вираз  $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3}$  при  $a > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[4]{9a^2}$	$3a$	$3\sqrt[4]{a^3}$	$9a$	$\sqrt{3a}$

*Розв'язання.* Оскільки  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  (при всіх допустимих значеннях  $a$  і  $b$ ), то

$\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3} = \sqrt[4]{27a \cdot 3a^3} = \sqrt[4]{81a^4} = 3a$  (при  $a > 0$ ). Тобто правильна відповідь Б.

30. Обчисліть:  $\sqrt[4]{(-3)^2} \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 9}$ .

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	-6	6	$6\sqrt{2}$

31. Спростіть вираз  $\frac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{t^2}$	$\frac{2\sqrt[5]{36}}{t^2}$	$2t^2$	$2t^2 \cdot \sqrt[5]{36}$	$\frac{1}{2t^2}$

*Розв'язання.* Оскільки  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  (при всіх допустимих значеннях  $a$  і  $b$ ), то

$\frac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}} = \sqrt[5]{\frac{192t}{6t^{11}}} = \sqrt[5]{\frac{32}{t^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{t^{10}}} = \frac{2}{t^2}$ . Тобто правильна відповідь А.

32. Спростіть вираз  $\sqrt[3]{16ab^{12}} : \sqrt[3]{2a^4b^9}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2b}{a}$	$2ab$	$2a^3b$	$2ab^3$	$\frac{b}{2a}$

33. Спростіть вираз  $\frac{\sqrt[8]{16a^5b^7}}{\sqrt{2ab}} + 2\sqrt[8]{ab^3}$ , якщо  $a > 0$  та  $b > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
0	$3\sqrt[4]{ab^3}$	$3\sqrt[8]{ab^3}$	$2\sqrt{ab}$	$\sqrt{ab}$

34. Спростіть вираз  $\sqrt[3]{8a^3} - (2a + \sqrt[4]{a^2b^8})$ , якщо  $a \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$4a + b^2\sqrt{a}$	$b^2\sqrt{a}$	$1 + b^2\sqrt{a}$	$-b^2\sqrt{a}$	$1 - b^2\sqrt{a}$

35. Спростіть вираз  $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[5]{\frac{n^3}{2m}}$	$\frac{\sqrt[5]{n^3}}{2m}$	$\frac{n}{\sqrt[5]{2m}}$	$\frac{n}{2m}$	$\frac{2n}{m}$

36. Обчисліть:  $\frac{\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{2}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1,5	12,5	1,25	2,25	1,2

37. Обчисліть:  $\frac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$ .

А	Б	В	Г	Д
0,5	2	2,5	4	0,625

38. Обчисліть:  $\frac{3\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{189}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	4,5	8	21	3



39. Спростіть вираз  $\sqrt{4(a-1)^2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}}$ , якщо  $a < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$1,5a - 2$	$2,5a - 2$	$2 - 1,5a$	$4 - 5a$	$2 - 2,5a$

*Розв'язання.* При перетворенні заданого виразу слід врахувати, що  $\sqrt{a^2} = |a|$ . Тоді  $\sqrt{4(a-1)^2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}} = 2|a-1| - \frac{|a|}{2}$ . За умовою  $a < 0$ , тоді  $a-1 < 0$ . Враховуючи, що модулем від'ємного числа є протилежне йому число, одержуємо  $2|a-1| - \frac{|a|}{2} = -2(a-1) - \frac{-a}{2} = 2 - 1,5a$ . Тобто правильна відповідь **В**.

40. Спростіть вираз  $\sqrt{16a^2} - \sqrt{(a-2)^2}$ , якщо  $a < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$3a + 2$	$3a - 2$	$-3a + 2$	$-3a - 2$	$5a - 2$

41. Обчисліть:  $-17 \cdot 125^{\frac{1}{3}} + 18$ .

А	Б	В	Г	Д
$-443$	$-407$	$-67$	$-103$	$-77$

*Розв'язання.*  $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ , тому  $-17 \cdot 125^{\frac{1}{3}} + 18 = -17 \cdot 5 + 18 = -67$ . Тобто правильна відповідь **В**.

42. Обчисліть:  $6 - 2 \cdot 625^{\frac{1}{4}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$20$	$56$	$-4$	$-44$	$24$

43. Обчисліть:  $5 \cdot 64^{\frac{1}{6}} + 0,7^0$ .

А	Б	В	Г	Д
$10,7$	$11$	$9,3$	$9$	$9,7$

44. Знайдіть значення виразу  $3^{4a} \cdot 3^{-2a}$  при  $a = \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$27$	$4,5$	$3$	$81$	$9$

*Розв'язання.* Спочатку спростимо заданий вираз, а потім підставимо задане значення  $a$ :  $3^{4a} \cdot 3^{-2a} = 3^{4a-2a} = 3^{2a}$ , тоді при  $a = \frac{1}{2}$  одержуємо  $3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$ . Тобто правильна відповідь **В**.

45. Знайдіть значення виразу  $2^{7a} \cdot 2^{-3a}$  при  $a = \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
256	32	8	4	16

46. Спростіть вираз  $b^{-5,6} \cdot 11b^{0,4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$11b^{-5,2}$	$11^{0,4}b^{-5,2}$	$11b^{-6}$	$11^{0,4}b^{-6}$	$11b^6$

47. Спростіть вираз  $k^{-5,3} \cdot 4k^{0,1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$4^{0,1}k^{-5,2}$	$4k^{-5,2}$	$4k^{-5,4}$	$4^{0,1}k^{-5,4}$	$4k^{5,2}$

48. Спростіть вираз  $b^{-\frac{1}{3}} : b^{\frac{2}{9}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$b^{\frac{1}{9}}$	$b^{-\frac{3}{2}}$	$b^{\frac{1}{9}}$	$b^{\frac{5}{9}}$	$b^{-\frac{5}{9}}$

49. Спростіть вираз  $2b^{\frac{2}{7}} : \left(0,2b^{\frac{3}{7}}\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$10b^{-\frac{1}{7}}$	$1,8b^{-\frac{1}{7}}$	$10b^{\frac{5}{7}}$	$0,4b^{\frac{2}{3}}$	$4b^{\frac{2}{3}}$

50. Знайдіть значення виразу  $\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{7}{5}}}$  при  $n = 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$8^{-\frac{3}{7}}$	64	16	$8^{-\frac{4}{5}}$	8

51. Спростіть вираз  $3^{-\frac{5}{2}} : 3^{-\frac{2}{3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$3^{-\frac{19}{6}}$	$3^{\frac{15}{4}}$	$3^{\frac{5}{3}}$	$3^{\frac{11}{6}}$	$3^{-\frac{11}{6}}$

52. Спростіть вираз  $\frac{11^{1,5}}{11^{0,3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1,2	5	$11^{1,2}$	$11^5$	$11^{-1,2}$

53. Спростіть вираз  $7c^{\frac{5}{6}} - 2\left(c^{\frac{1}{6}}\right)^5$ .

А	Б	В	Г	Д
$5c$	$-25c$	$-25c^{\frac{5}{6}}$	$5c^{\frac{5}{6}}$	$5$

54. Знайдіть значення виразу  $\frac{x+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$  при  $x=8, y=5$ .

А	Б	В	Г	Д
$1$	$0,5$	$3$	$5$	$8$

55. Обчисліть:  $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-2$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

*Розв'язання.* За означенням логарифма необхідно знайти показник степеня, до якого потрібно піднести основу  $\frac{1}{8}$ , щоб одержати число  $\sqrt{2}$ . Враховуючи, що  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$  і  $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ , одержуємо, що потрібний показник дорівнює  $-\frac{1}{6}$ . Тобто правильна відповідь В. Також для розв'язування

можна було використати перехід до основи 2:  $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{2} = \frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-3} = -\frac{1}{6}$ .

56. Обчисліть:  $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

57. Знайдіть значення виразу  $\log_3(9a)$ , якщо  $\log_3 a = 0,3$ .

А	Б	В	Г	Д
$0,6$	$2,3$	$2,7$	$3,3$	$9,3$

58. Якщо  $\log_5 a = 6, \log_5 b = 3$ , то  $\log_5 \frac{a}{b}$  дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
$2$	$0,5$	$9$	$3$	$-3$

59. Знайдіть значення виразу  $\log_4(64c)$ , якщо  $\log_4 c = -3,5$ .

А	Б	В	Г	Д
-0,5	2,3	2,7	6,5	9,3

60. Обчисліть значення виразу  $\lg 2a + \lg 5b$ , якщо  $\lg ab = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
1,5	6	3	4	1

*Розв'язання.* Враховуючи формулу  $\log_a u + \log_a v = \log_a(uv)$  (один раз зліва направо, а другий раз справа наліво) і те, що за умовою  $\lg ab = 3$ , одержуємо:

$$\lg 2a + \lg 5b = \lg(2a \cdot 5b) = \lg(10 \cdot ab) = \lg 10 + \lg(ab) = 1 + 3 = 4.$$

Тобто правильна відповідь Г.

61. Обчисліть значення виразу  $\frac{1}{3} \left( \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27} + \log_{\frac{1}{2}} 64 \right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$-4 + \log_{\frac{1}{2}} 3$	0	$\log_2 3 - 2$	4	1

62. Спростіть вираз  $\log_5 \frac{35}{3} + \log_5 \frac{75}{7}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\log_5 \frac{245}{6}$	$\log_5 30$	3	5	7

63. Обчисліть:  $\log_2 \frac{b}{16}$ , якщо  $\log_2 b = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
1	-7	3	7	-1

64. Знайдіть значення виразу  $\log_5 b$ , якщо  $\log_5 b^4 = 16$ .

А	Б	В	Г	Д
64	2	12	4	16

65. Обчисліть значення виразу  $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_2 81}$ .

А	Б	В	Г	Д
25	10	20	45	405

*Розв'язання.* Враховуючи формулу  $a^{u+v} = a^u \cdot a^v$  та основну логарифмічну тотожність  $a^{\log_a b} = b$ ,

одержуємо  $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{5}} 5} \cdot (\sqrt{2})^{\log_2 81} = 5 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 3^4} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{2} \log_2 81} = 5 \cdot 2^{\log_2 81^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot 81^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot \sqrt{81} = 5 \cdot 9 = 45$ . Тобто

правильна відповідь Г.

66. Знайдіть значення виразу:  $4,5^{\log_{4,5} 9} - 15$ .

А	Б	В	Г	Д
-6	24	-10,5	6	10,5

67. Обчисліть значення виразу  $5^{\log_5 3} \cdot \log_2 8$ .

А	Б	В	Г	Д
1	0,375	24	9	3

68. Знайдіть значення виразу  $3\sin^2 x - 2$ , якщо  $\cos^2 x = 0,1$ .

А	Б	В	Г	Д
0,9	-0,7	4,7	0,7	Інша відповідь

*Розв'язання.* Враховуючи, що  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 0,9$ , одержуємо  $3\sin^2 x - 2 = 3 \cdot 0,9 - 2 = 0,7$ . Тобто правильна відповідь Г.

69. Знайдіть значення виразу  $5\cos^2 x - 1$ , якщо  $\sin^2 x = 0,2$ .

А	Б	В	Г	Д
3	0	-0,2	1	Інша відповідь

70. Спростіть вираз  $\frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	$\frac{1}{\sin^2 \alpha}$	$\frac{1}{\cos^2 \alpha}$

71. Знайдіть значення виразу  $2 - \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x$ , якщо  $\cos x = 0,2$ .

А	Б	В	Г	Д
1,2	1,96	1,04	1,6	1

72. Спростіть вираз  $1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
0	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	$-\sin^2 \alpha$	$-\cos^2 \alpha$

73. Спростіть вираз  $-5\sin^2 \alpha + 1 - 5\cos^2 \alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
1	4	$1 + 10\sin^2 \alpha$	$1 - 10\cos^2 \alpha$	-4

74. Спростіть вираз  $\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2x$	$2\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\cos^4 x$	$2\cos^2 x$

75. Спростіть вираз  $(\cos x - \sin x)^2 + 2\sin x \cos x$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	$1 - 2\sin 2x$	$\cos 2x + \sin 2x$	$1 + 2\sin 2x$

76. Знайдіть  $\operatorname{tg} \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{\sqrt{19}}$	$\frac{3}{\sqrt{19}}$	$-\frac{\sqrt{19}}{4}$	$-\frac{\sqrt{19}}{3}$	$\frac{\sqrt{19}}{3}$

77. Знайдіть значення виразу  $\sqrt{2} \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

78. Спростіть вираз  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	$\frac{1}{\sin 2\alpha}$	$\operatorname{ctg} 2\alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{tg} 2\alpha$

79. Спростіть вираз  $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
-1	$2\sin^2\alpha$	$2\cos\alpha$	0	1

*Розв'язання.* Спочатку використаємо формули зведення, а потім інші тригонометричні формули:  $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = (-\cos\alpha)^2 + (-\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ . Тобто правильна відповідь Д.

80. Спростіть вираз  $\operatorname{tg}^2(270^\circ + \alpha)\sin^2(180^\circ + \alpha)$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\sin^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$-\cos^2\alpha$	$\frac{1}{\cos^2\alpha}$

81. Спростіть вираз  $\sin 2,5\alpha \cos 1,5\alpha + \sin 1,5\alpha \cos 2,5\alpha + \cos(4\pi - \alpha)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sin 4\alpha - \cos\alpha$	$\sin\alpha + \cos\alpha$	$\sin\alpha - \cos\alpha$	$\cos\alpha + \sin 4\alpha$	$\cos\alpha + \cos 4\alpha$

82. Спростіть вираз  $\sin 3\alpha \sin 2\alpha - \cos 3\alpha \cos 2\alpha - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\cos 5\alpha - \sin\alpha$	$-\cos 5\alpha + \sin\alpha$	$-\cos 5\alpha - \sin\alpha$	$2\sin\alpha$	$2\cos\alpha$

83. Знайдіть значення виразу  $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) - 2$  при  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
-2	2	-1	0	-4

84. Спростіть значення виразу  $\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \sin\alpha}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$	$\frac{1}{1 + \sin\alpha}$	$1 + \sin\alpha$	$\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 + \sin\alpha}$

85. Обчисліть:  $\sqrt{(2\sin 45^\circ - 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 45^\circ)^2}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{2}$	2

Розв'яжіть завдання 86–114. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу.

86. Обчисліть значення виразу  $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$ , якщо  $a = -0,3$ ;  $b = -10,3$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

87. Спростіть вираз  $\left(\frac{1}{x^2} - x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^2 - 1} - \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2 + 1}\right)$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

88. Спростіть вираз  $\left(\frac{a^{0,5} + 3}{a^{0,5} - 3} + \frac{a^{0,5} - 3}{a^{0,5} + 3} - \frac{36}{a - 9}\right)^3$ .

Розв'язання. Виконаємо дії в дужках (спочатку зведемо перші два дробу до спільного знаменни-

$$\begin{aligned} \text{ка): } & \frac{a^{0,5} + 3}{a^{0,5} - 3} + \frac{a^{0,5} - 3}{a^{0,5} + 3} - \frac{36}{a - 9} = \frac{(a^{0,5} + 3)^2 + (a^{0,5} - 3)^2}{(a^{0,5} - 3)(a^{0,5} + 3)} - \frac{36}{a - 9} = \frac{a + 6a^{0,5} + 9 + a - 6a^{0,5} + 9}{a - 9} - \frac{36}{a - 9} = \\ & = \frac{2a + 18 - 36}{a - 9} = \frac{2a - 18}{a - 9} = \frac{2(a - 9)}{a - 9} = 2. \text{ Тоді заданий вираз дорівнює } 2^3 = 8. \end{aligned}$$

Відповідь: 8.

89. Обчисліть значення виразу  $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$  при  $x = 2,999$ .

Розв'язання.  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$ . При  $x = 2,999$  одержуємо  $|x - 3| = |2,999 - 3| =$   
 $= |-0,001| = 0,001$ .

Відповідь: 0,001.



90. Знайдіть значення виразу  $\frac{\sqrt{(a+4)^2 - 16a}}{a-3}$ , якщо  $a = 3,2$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

91. Обчисліть:  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

92. Обчисліть значення виразу  $\frac{22}{5 - \sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{11} + 2}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

93. Обчисліть суму перших 10 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а шостий член дорівнює 17.

Відповідь: \_\_\_\_\_

94. Сума третього та дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайдіть суму перших одинадцяти членів цієї прогресії.

Відповідь: \_\_\_\_\_

95. Знайдіть різницю арифметичної прогресії  $(a_n)$ , якщо відомі два її члени:  $a_7 = 7$ ,  $a_9 = -9$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

96. Знайдіть суму перших дванадцяти непарних натуральних чисел.

Відповідь: \_\_\_\_\_

97. Знайдіть суму перших 11 членів арифметичної прогресії, знаючи, що її шостий член дорівнює 4.

Відповідь: \_\_\_\_\_

98. Обчисліть значення виразу  $\sin a - \cos a$ , якщо  $\sin(2a) = 0,96$  і  $a \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

99. Обчисліть значення виразу  $5(\cos 430^\circ \sin 400^\circ - \sin 130^\circ \cos 740^\circ)$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

100. Обчисліть значення виразу  $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$ , якщо  $a + b = \frac{2\pi}{3}$ ,  $a - b = \frac{\pi}{3}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

101. Обчисліть значення виразу  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

102. Обчисліть  $\cos \alpha$ , якщо  $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$  і  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

103. Обчисліть:  $4\sin 15^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 75^\circ$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

104. Обчисліть:  $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

105. Спростіть вираз  $(\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a)\sin 2a$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

106. Обчисліть значення виразу  $\sin 2\alpha$ , якщо  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

107. Обчисліть значення виразу  $\frac{\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \sin 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 50^\circ \cos 40^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ}$

Розв'язання.  $\frac{\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \sin 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 50^\circ \cos 40^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ} = \frac{\cos(32^\circ + 28^\circ)}{\sin(50^\circ + 40^\circ)} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

Відповідь: 0,5.

108. Обчисліть:  $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

Вказівка. Перейти у всіх логарифмах до основи 2.

109. Обчисліть  $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

110. Обчисліть:  $\log_9 49 \cdot \log_7 5 \cdot \log_{25} 27$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

111. Обчисліть значення виразу  $\log_{\sqrt{3}} 5 - \log_3 2\frac{7}{9}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

112. Обчисліть значення виразу  $\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1$ , якщо  $\log_{ab} a = 0,5$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

113. Обчисліть значення виразу  $\frac{4}{2^{\log_{\sqrt{2}} 2}}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

114. Обчисліть:  $4^{\log_2 \sqrt{14} + 0,5}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

Завдання 115–116 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви)\*.

115. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |   |   |
|---|---|
| 1 $(\sin x + \cos x)^2$                         | А $2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ |
| 2 $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)$          | Б $\cos 4x$                               |
| 3 $\sin 3x \cdot \sin x - \cos 3x \cdot \cos x$ | В $-\cos 4x$                              |
| 4 $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$                  | Г $\cos 2x$                               |
|   | Д $1 + \sin 2x$                           |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

116. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |  |                  |
|--|------------------|
| 1 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}}$ при $a \leq 0$ | А $\sqrt[3]{a}$  |
| 2 $\sqrt[8]{\sqrt[3]{a^8}}$ при $a \geq 0$ | Б $\sqrt{3} + 1$ |
| 3 $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$      | В $\sqrt{3} + 2$ |
| 4 $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$                   | Г $\sqrt{3} - 1$ |
|  | Д $-\sqrt[3]{a}$ |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

\* Приклади виконання таких завдань наведено на с. 4–5.

## Розділ 2

# РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

## Основні поняття, формули, властивості до розділу 2 «Рівняння та нерівності»

Таблиця 17. РІВНЯННЯ

Означення	Приклад
<i>Рівняння — це рівність із змінною</i>	$2x = 12$ — рівняння
<i>Корінь (або розв’язок) рівняння — це таке значення змінної, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність</i>	$x = 6$ — корінь рівняння $2x = 12$ , оскільки $2 \cdot 6 = 12$ — правильна рівність
<i>Розв’язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що їх немає</i>	$0 \cdot x = 12$ — рівняння, у якого немає коренів, оскільки добуток $0 \cdot x = 0$ не може дорівнювати 12

Таблиця 18. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

Означення		Приклад	
Рівняння виду $ax = b$ , де $a$ і $b$ — деякі числа, називається <i>лінійним рівнянням</i> зі змінною $x$		$-3x = 10$ — лінійне рівняння	
Розв’язування лінійного рівняння $ax = b$			
Схеми розв’язування		Приклади	
1. $a \neq 0$		Єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$ $5x = 20$ . Єдиний корінь — $x = \frac{20}{5}$ , тобто $x = 4$	
2. $a = 0$	$0 \cdot x = b$	а) $b \neq 0$	Коренів немає $0 \cdot x = 5$ . Коренів немає
		б) $b = 0$	$x$ — будь-яке число $0 \cdot x = 0$ ; $x$ — будь-яке число

Розв'язування рівнянь, які зводяться до лінійних	
Схема розв'язування	Приклад
1. Розкриваємо дужки (якщо вони є). 2. Переносимо члени зі змінною в одну частину рівняння, а без змінної — в іншу. 3. Зводимо подібні доданки. 4. Розв'язуємо одержане лінійне рівняння $ax = b$ .	$2(3x - 1) + x = 5x + 8;$ $6x - 2 + x = 5x + 8;$ $6x + x - 5x = 8 + 2;$ $2x = 10;$ $x = 5$

Таблиця 19. **КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ**

Означення та властивості	Приклади
Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ , де $x$ — змінна, $a, b, c$ — деякі числа, причому $a \neq 0$ , називається <b>квадратним рівнянням</b>	$2x^2 - 5x + 3 = 0;$ $x^2 - 4 = 0;$ $2x^2 - 3x = 0$ — квадратні рівняння
Неповні квадратні рівняння	
Якщо у квадратному рівнянні <i>другий коефіцієнт або вільний член дорівнює нулю</i> ( $b = 0$ або $c = 0$ ), то квадратне рівняння називається <b>неповним</b>	$-x^2 + 9 = 0;$ $x^2 - x = 0$ — неповні квадратні рівняння
1) при $b = 0$ і $c = 0$ ( $a \neq 0$ ) $ax^2 = 0, x^2 = 0$ $x = 0$ — єдиний корінь	$-5x^2 = 0$ Розв'язання. $x^2 = 0, x = 0$ Відповідь: 0
2) при $c = 0$ ( $a \neq 0; b \neq 0$ ) виносимо за дужки спільний множник $x$ : $ax^2 + bx = 0; x(ax + b) = 0$ $x = 0$ або $ax + b = 0$ ( $a \neq 0$ ) $x = 0$ або $x = -\frac{b}{a}$ — два корені	$2x^2 - 6x = 0$ Розв'язання. $2x(x - 3) = 0$ $2x = 0$ або $x - 3 = 0$ $x = 0$ або $x = 3$ Відповідь: 0; 3
3) при $b = 0$ ( $a \neq 0; c \neq 0$ ) зводимо рівняння до виду $x^2 = d$ : $ax^2 + c = 0; ax^2 = -c; x^2 = -\frac{c}{a}$	$3x^2 + 21 = 0$ Розв'язання. $x^2 = -7$ Відповідь: коренів немає
Якщо $-\frac{c}{a} < 0$ , коренів немає	Якщо $-\frac{c}{a} > 0$ , $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ — два корені
	$3x^2 - 21 = 0$ $x^2 = 7, x = \pm\sqrt{7}$ $x_1 = \sqrt{7}; x_2 = -\sqrt{7}$ Відповідь: $\sqrt{7}; -\sqrt{7}$

**Повні квадратні рівняння**

Повне квадратне рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) розв'язується за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

де  $D = b^2 - 4ac$  називається **дискримінантом** даного квадратного рівняння

ВЛАСТИВОСТІ	ПРИКЛАДИ
<p>Якщо <math>D &gt; 0</math>, то рівняння має <i>два різні корені</i></p> $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	$3x^2 - 5x + 2 = 0$ <p><i>Розв'язання.</i></p> $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$ $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6}$ $x_1 = \frac{5+1}{6} = 1; x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ <p><i>Відповідь:</i> <math>1; \frac{2}{3}</math></p>
<p>Якщо <math>D = 0</math>, то рівняння має <i>два однакові корені:</i></p> $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ <p>(у двох коренів <i>однакові значення</i>, тому кажуть, що при <math>D = 0</math> рівняння має <i>єдиний корінь</i>)</p>	$x^2 + 6x + 9 = 0$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0</math></p> $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}, x_1 = x_2 = -\frac{6}{2} = -3$ <p><i>Відповідь:</i> <math>-3</math></p>
<p>Якщо <math>D &lt; 0</math>, то рівняння <i>не має дійсних коренів</i></p>	$2x^2 + x + 5 = 0$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 &lt; 0</math></p> <p><i>Відповідь:</i> коренів немає</p>

**Зведені квадратні рівняння**

ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ	ПРИКЛАДИ
<p>Квадратне рівняння називається <b>зведеним</b>, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці. Зведене квадратне рівняння часто записують так:</p> $x^2 + px + q = 0$	$x^2 - 3x + 2 = 0;$ $x^2 + 5x + 4 = 0$ <p>— зведені квадратні рівняння</p>

<p>Зведене квадратне рівняння <math>x^2 + px + q = 0</math> можна розв'язувати як за формулою повного квадратного рівняння, так і за формулою</p> $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$ <p>де <math>D_1 = \frac{p^2}{4} - q</math> називається <b>дискримінантом</b> зведеного квадратного рівняння</p>	$x^2 - 4x + 3 = 0$ <p>Розв'язання.</p> $D_1 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3 = 1 > 0$ $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1}$ $x_1 = 2 + 1 = 3; x_2 = 2 - 1 = 1$ <p>Відповідь: 3; 1</p>
--	--

Таблиця 20. РІВНЯННЯ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Заміна змінних	
<p><b>Орієнтир.</b> Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)</p>	
<p><b>Приклади</b></p>	
<p><b>Бікватратне рівняння</b> — це рівняння виду <math>ax^4 + bx^2 + c = 0</math>, де <math>a \neq 0</math></p> $x^4 + x^2 - 2 = 0$ <p>Розв'язання. Заміна <math>x^2 = t</math>. Тоді <math>x^4 = (x^2)^2 = t^2</math>. Одержуємо рівняння <math>t^2 + t - 2 = 0</math>; <math>D = 1^2 + 8 = 9</math>; <math>t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}</math>; <math>t_1 = 1</math>; <math>t_2 = -2</math>.</p> <p>Виконуємо обернену заміну.</p> <p>1. При <math>t = 1</math> маємо <math>x^2 = 1</math>, тобто <math>x = \pm 1</math>.</p> <p>2. При <math>t = -2</math> маємо <math>x^2 = -2</math> — рівняння не має коренів.</p> <p>Відповідь: 1; -1</p>	$(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 6 = 0$ <p>Розв'язання. Заміна <math>x^2 + x = t</math>. Одержуємо рівняння <math>t^2 + t - 6 = 0</math>; <math>D = 1^2 + 24 = 25</math>; <math>t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}</math>; <math>t_1 = 2</math>; <math>t_2 = -3</math>.</p> <p>Виконуємо обернену заміну.</p> <p>1. При <math>t = 2</math> маємо <math>x^2 + x = 2</math>, тобто <math>x^2 + x - 2 = 0</math>. Звідси <math>x_1 = 1</math>; <math>x_2 = -2</math>.</p> <p>2. При <math>t = -3</math> маємо <math>x^2 + x = -3</math>, тобто <math>x^2 + x + 3 = 0</math> — рівняння не має коренів, оскільки <math>D = -11 &lt; 0</math>.</p> <p>Відповідь: 1; -2</p>

Таблиця 21. ДРОБОВІ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Схема розв'язування	
<p>Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <i>перенести всі члени рівняння в ліву частину;</i></li> <li>2) <i>виконати всі вказані дії та одержати рівняння, у якого ліва частина — дріб (чи цілий вираз), а права — нуль;</i></li> <li>3) <i>використати властивість: дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю (а знаменник не дорівнює нулю), і прирівняти чисельник одержаного дробу до нуля;</i></li> <li>4) <i>розв'язати одержане рівняння;</i></li> <li>5) <i>перевірити, чи при всіх знайдених розв'язках в знаменниках заданого рівняння будуть числа, які не дорівнюють нулю (якщо одержимо в знаменнику нуль, то знайдене число не є коренем заданого рівняння)</i></li> </ol>	<p>Розв'язати рівняння <math>\frac{2}{x} + \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2+2}{x}</math>.</p> <p><i>Розв'язання.</i> Перенесемо всі члени в ліву частину і згрупуємо дробові з однаковими знаменниками:</p> $\frac{2}{x} - \frac{x^2+2}{x} + \frac{2x}{x+1} = 0; \quad \frac{2-(x^2+2)}{x} + \frac{2x}{x+1} = 0;$ $-x + \frac{2x}{x+1} = 0; \quad \frac{-x^2-x+2x}{x+1} = 0;$ $\frac{-x^2+x}{x+1} = 0; \quad -x^2+x=0;$ <p><math>x(-x+1)=0</math>, якщо <math>x=0</math> або <math>-x+1=0</math>, тобто <math>x=0</math> або <math>x=1</math>.</p> <p>При <math>x=0</math> в знаменнику першого дробу в заданому рівнянні одержуємо нуль. Отже, <math>x=0</math> не є коренем заданого рівняння. При <math>x=1</math> усі знаменники дробів у заданому рівнянні не дорівнюють нулю (<math>x=1 \neq 0</math>; <math>x+1=2 \neq 0</math>). Отже, <math>x=1</math> — корінь заданого рівняння. <i>Відповідь:</i> 1</p>
Інша схема розв'язування	
<p>Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <i>записати ОДЗ заданого рівняння;</i></li> <li>2) <i>знайти спільний знаменник усіх дробів, що входять до запису рівняння (доцільно вибирати той спільний знаменник, який можна подати як многочлен найменшого степеня, тоді він не буде дорівнювати нулю на ОДЗ заданого рівняння);</i></li> <li>3) <i>помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник (одержимо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ);</i></li> <li>4) <i>розв'язати одержане ціле рівняння;</i></li> <li>5) <i>перевірити, чи всі знайдені розв'язки входять до ОДЗ, тобто чи задовольняють вони всі умови ОДЗ (якщо знайдене число не задовольняє якесь з обмежень ОДЗ, то воно не є коренем заданого рівняння)</i></li> </ol>	<p>Розв'язати рівняння <math>\frac{2}{x} + \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2+2}{x}</math>.</p> <p><i>Розв'язання.</i> ОДЗ: <math>\begin{cases} x \neq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}</math> Помножимо обидві частини заданого рівняння на <math>x(x+1)</math> — спільний знаменник заданих дробів, який не дорівнює нулю на ОДЗ:</p> $2(x+1) + 2x^2 = (x^2+2)(x+1),$ $2x+2+2x^2 = x^3+x^2+2x+2,$ $2x+2+2x^2-x^3-x^2-2x-2=0,$ $-x^3+x^2=0;$ $-x^2(x-1)=0. \text{ Тоді}$ $x^2=0 \text{ або } x-1=0, \text{ тобто}$ $x=0 \text{ або } x=1.$ <p>Врахуємо ОДЗ: <math>x=0</math> — не задовольняє першу умову ОДЗ, отже, <math>x=0</math> не є коренем заданого рівняння. При <math>x=1</math> обидві умови ОДЗ виконуються, отже, <math>x=1</math> — корінь заданого рівняння. <i>Відповідь:</i> 1</p>



Таблиця 22. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

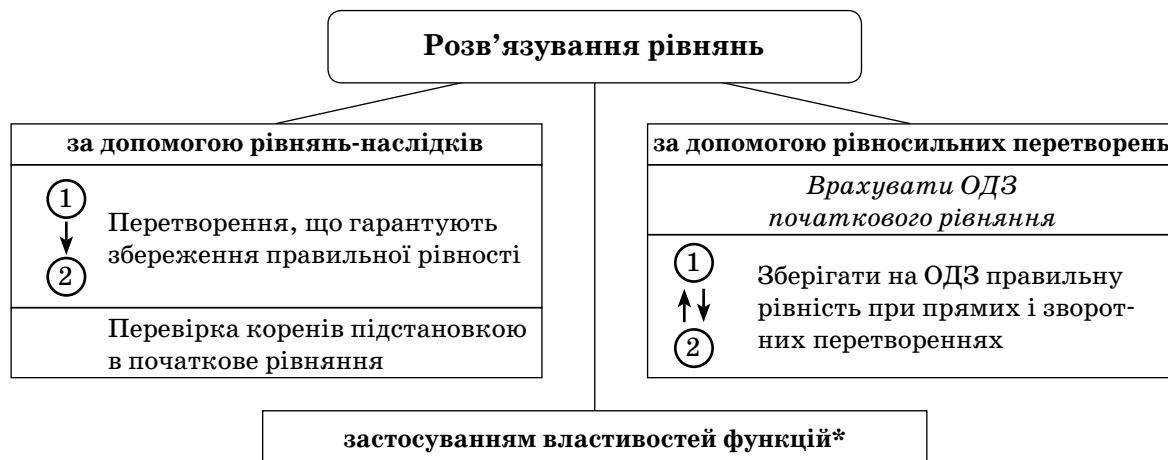
1. Область допустимих значень (ОДЗ)	
<p><i>Область допустимих значень (або областю визначення) рівняння (або нерівності) називається спільна область визначення для всіх функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (чи нерівності)</i></p>	<p>Для рівняння <math>\sqrt{x+2} = x</math> ОДЗ: <math>x+2 \geq 0</math>, тобто <math>x \geq -2</math>, оскільки область визначення функцій <math>f(x) = \sqrt{x+2}</math> визначається умовою <math>x+2 \geq 0</math>, а областю визначення функції <math>g(x) = x</math> є множина всіх дійсних чисел</p>
2. Рівняння-наслідки	
<p>Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається <b>наслідком</b> першого.</p> <p>Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, то одержуємо <b>рівняння-наслідок</b>.</p> <p>При цьому можлива поява <i>сторонніх коренів</i>. Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування</p>	$\sqrt{x+2} = x.$ <p><i>Розв'язання.</i> Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:</p> $(\sqrt{x+2})^2 = x^2;$ $x+2 = x^2;$ $x^2 - x - 2 = 0;$ $x_1 = 2, x_2 = -1.$ <p>Перевірка. <math>x = 2</math> — корінь; <math>x = -1</math> — сторонній корінь.</p> <p><i>Відповідь:</i> 2</p>
3. Рівносильні рівняння та нерівності	
ОЗНАЧЕННЯ	НАЙПРОСТІШІ ТЕОРЕМИ
<p>Два рівняння (дві нерівності) називаються <b>рівносильними на деякій множині</b>, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки.</p> <p>Тобто кожний розв'язок першого рівняння (першої нерівності) є розв'язком другого (другої), і навпаки, кожний розв'язок другого рівняння (другої нерівності) є розв'язком першого (першої) (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пунктах 5 і 7 цієї таблиці)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (рівносильну заданій) (на будь-якій множині)</li> <li>Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)</li> </ol>

Продовження таблиці 22

**4. Теореми про рівносильність нерівностей**

1. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)

**5. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь**



- ① — початкове рівняння;  
 ② — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;  
 ↑↓ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

**6. Заміна змінних**

Орієнтир	Приклад
<p>Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)</p>	<p><math>\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0.</math></p> <p><i>Розв'язання.</i></p> <p>Заміна: <math>\sin x = t. t^2 - 2t - 3 = 0; t_1 = 3, t_2 = -1.</math></p> <p>1. При <math>t = 3</math> маємо <math>\sin x = 3</math> — коренів немає, оскільки <math> 3  &gt; 1.</math></p> <p>2. При <math>t = -1</math> маємо <math>\sin x = -1,</math>  тоді <math>x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.</math> <i>Відповідь:</i> <math>-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}</math></p>

\* Див. таблицю 23.

7. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

**за допомогою  
рівносильних перетворень**

*Врахувати ОДЗ  
початкової нерівності*

① Зберігати на ОДЗ правильну  
↑↓  
② нерівність при прямих  
і зворотних перетвореннях

**за допомогою  
методу інтервалів ( $f(x) \geq 0$ )**

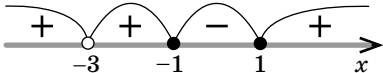
1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції:  $f(x) = 0$ .
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції  $f(x)$  у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

① — початкова нерівність;

② — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

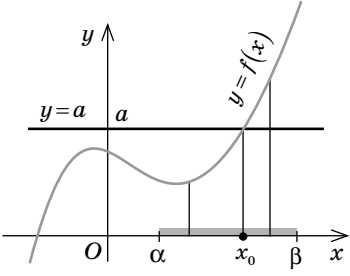
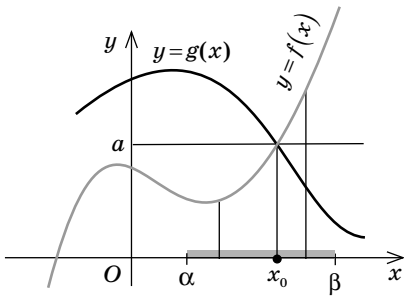
↑↓ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

8. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду  $f(x) \geq 0$ )

План	Приклад
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Знайти ОДЗ.</li> <li>2. Знайти нулі функції: <math>f(x) = 0</math>.</li> <li>3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак <math>f(x)</math> у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.</li> <li>4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.</li> </ol>	<p>Розв'яжіть нерівність <math>\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} \geq 0</math>.</p> <p><i>Розв'язання.</i> Нехай <math>f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2}</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ОДЗ: <math>(x + 3)^2 \neq 0</math>, отже, <math>x \neq -3</math>.</li> <li>2. Нулі функції: <math>f(x) = 0</math>.</li> </ol> $\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} = 0; \quad x^2 - 1 = 0;$ $x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \text{ (входять до ОДЗ).}$ <p>3. </p> <p>Відповідь: <math>(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)</math></p>

Таблиця 23. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Орієнтир	Приклад
<b>1. Скінченна ОДЗ</b>	
<p>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення</p>	$\sqrt{x^2-1} + x = 1 + \sqrt{2-2x^2}.$ <p>Розв'язання.</p> $\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ 2-2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1, \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$ <p>Перевірка.</p> <p><math>x = 1</math> — корінь (<math>\sqrt{0} + 1 = 1 + \sqrt{0}</math>, <math>1 = 1</math>);  <math>x = -1</math> — не корінь (<math>\sqrt{0} - 1 \neq 1 + \sqrt{0}</math>).</p> <p>Відповідь: 1</p>
<b>2. Оцінка лівої та правої частин рівняння</b>	
$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq a, \\ g(x) \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$ <p>Якщо потрібно розв'язати рівняння виду <math>f(x) = g(x)</math> і з'ясувалося, що <math>f(x) \geq a</math>, <math>g(x) \leq a</math>, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> одночасно дорівнюють <math>a</math></p>	$1 - x^2 = \sqrt{1 + \sqrt{ x }}.$ <p>Розв'язання.</p> $f(x) = 1 - x^2 \leq 1;$ $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{ x }} \geq 1 \text{ (бо } \sqrt{ x } \geq 0 \text{)}.$ <p>Отже, задане рівняння рівносильне системі</p> $\begin{cases} 1 - x^2 = 1, \\ \sqrt{1 + \sqrt{ x }} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$ <p>Відповідь: 0</p>
$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0 \\ f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ \dots \\ f_n(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$ <p>Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю</p>	$\sqrt{x-2} +  x^2 - 2x  + (x^2 - 4)^2 = 0.$ <p>Розв'язання.</p> $f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0; f_2(x) =  x^2 - 2x  \geq 0; f_3(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0.$ <p>Отже, задане рівняння рівносильне системі</p> $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\  x^2 - 2x  = 0, \\ (x^2 - 4)^2 = 0. \end{cases}$ <p>З першого рівняння одержуємо <math>x = 2</math>, що задовольняє всю систему.</p> <p>Відповідь: 2</p>

3. Використання зростання та спадання функцій	
СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ	
<p>1. Підбираємо один або декілька коренів рівняння.                      2. Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння)</p>	
	<p style="text-align: center;"><b>Теореми про корені рівняння</b></p> <p><b>1. Якщо в рівнянні <math>f(x)=a</math> функція <math>f(x)</math> зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.</b></p> <p style="text-align: center;">Приклад.</p> <p>Рівняння <math>\sqrt{x} + 2x^3 = 3</math> має єдиний корінь <math>x = 1</math> (<math>\sqrt{1} + 2 \cdot 1^3 = 3</math>, тобто <math>3 = 3</math>), оскільки функція <math>f(x) = \sqrt{x} + 2x^3</math> зростає на всій області визначення <math>x \geq 0</math></p>
	<p><b>2. Якщо в рівнянні <math>f(x)=g(x)</math> функція <math>f(x)</math> зростає на деякому проміжку, а функція <math>g(x)</math> спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.</b></p> <p style="text-align: center;">Приклад.</p> <p>Рівняння <math>\sqrt{x} + x^3 = 3 - x</math> має єдиний корінь <math>x = 1</math> (<math>\sqrt{1} + 1^3 = 3 - 1</math>, тобто <math>2 = 2</math>), оскільки функція <math>f(x) = \sqrt{x} + x^3</math> зростає на всій області визначення <math>x \geq 0</math>, а <math>g(x) = 3 - x</math> спадає (на множині <math>\mathbf{R}</math>, а отже, і при <math>x \geq 0</math>)</p>

Таблиця 24. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Розв'язування рівнянь $\sin x = a$ і $\cos x = a$	
<p><math>\sin x = a</math></p> <p><math> a  &gt; 1</math>      <math> a  \leq 1</math></p> <p>Коренів немає      <math>x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}</math></p>	<p><math>\cos x = a</math></p> <p><math> a  &gt; 1</math>      <math> a  \leq 1</math></p> <p>Коренів немає      <math>x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}</math></p>

ОКРЕМІ ВИПАДКИ	
$\sin x = 0 \quad x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$ $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ $\cos x = 1 \quad x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ $\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$
Розв'язування рівнянь $tg x = a$ і $ctg x = a$	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>tg x = a</math>  <math>x = \arctg a + \pi n, n \in \mathbf{Z}</math> </div> <p>Окремий випадок <math>tg x = 0</math></p> $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>ctg x = a</math>  <math>x = \operatorname{arcc}tg a + \pi n, n \in \mathbf{Z}</math> </div> <p>Окремий випадок <math>ctg x = 0</math></p> $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
Схема розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Пробуємо всі тригонометричні функції <i>звести до одного аргументу</i>.</li> <li>2. Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази <i>звести до однієї функції</i>.</li> <li>3. Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо рівняння <i>звести до однорідного</i>.</li> <li>4. <i>В інших випадках переносимо всі члени рівняння в одну частину і пробуємо одержати добуток або використовуємо спеціальні прийоми розв'язування.</i></li> </ol>	

Таблиця 25. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь	
Орієнтир	Приклад
<p>При <math>a &gt; 0</math> і <math>a \neq 1</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)</math> </div>	<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> <math>3^{2x+4} = 9.</math> </div> <p><i>Розв'язання.</i></p> $3^{2x+4} = 3^2;$ $2x + 4 = 2;$ $x = -1.$

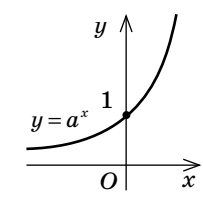
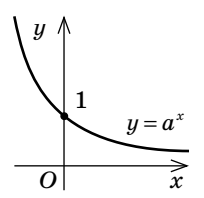
Зведення деяких показникових рівнянь до найпростіших	
Орієнтир	Приклад
1. Якщо в лівій і правій частинах показникового рівняння стоять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з однією основою	$2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}.$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}};</math> <math>2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2}-4x};</math>  <math>3x-3 = \frac{1}{2} - 4x; x = \frac{1}{2}.</math> <i>Відповідь:</i> <math>\frac{1}{2}</math></p>
2. Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду $a^{bx}$ (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь $a$	$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23.$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>5^{x-2}(5^2 - 2) = 23; 5^{x-2} \cdot 23 = 23;</math>  <math>5^{x-2} = 1; 5^{x-2} = 5^0;</math>  <math>x-2 = 0; x = 2.</math>  <i>Відповідь:</i> 2</p>

Таблиця 26. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

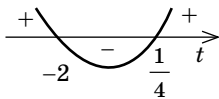
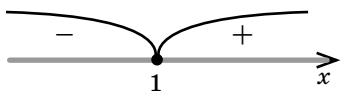
Схема пошуку плану розв'язування показникових рівнянь	
Орієнтир	Приклад
1. Позбавляємося числових доданків у показниках степенів (використовуючи справа наліво основні формули дій над степенями, наведені в табл. 9). 2. Якщо можливо, зводимо всі степені (із зміною в показнику) до однієї основи і виконуємо заміну змінної	$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>4^x \cdot 4^1 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.</math>  Враховуючи, що <math>4^x = 2^{2x}</math>, зводимо степені до однієї основи 2:  <math>4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.</math>  Заміна <math>2^x = t</math> дає рівняння:  <math>4t^2 - 3t - 10 = 0; t_1 = 2, t_2 = -\frac{5}{4}.</math>  Обернена заміна дає <math>2^x = 2</math>, тоді <math>x = 1</math> або <math>2^x = -\frac{5}{4}</math> — коренів немає.  <i>Відповідь:</i> 1</p>
3. Якщо не можна звести степені до однієї основи, то пробуємо звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння (яке розв'язується діленням обох частин рівняння на найбільший степінь одного з видів змінних)	$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0.$ <p><i>Розв'язання.</i>  Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3: <math>2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0.</math>  Маємо однорідне рівняння (у всіх членів однаковий сумарний степінь — <math>2x</math>). Для його розв'язування поділимо обидві частини на <math>3^{2x} \neq 0</math>: <math>\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0.</math>  Заміна <math>\left(\frac{2}{3}\right)^x = t</math> дає рівняння <math>t^2 + 3t - 4 = 0; t_1 = 1, t_2 = -4.</math>  Обернена заміна дає <math>\left(\frac{2}{3}\right)^x = -4</math> — коренів немає  або <math>\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1</math>, тоді <math>x = 0.</math> <i>Відповідь:</i> 0</p>

<p>4. В інших випадках переносимо всі члени рівняння в одну частину і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, у яких використовуються властивості відповідних функцій</p>	$6^x - 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 18 = 0.$ <p><i>Розв'язання.</i> Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержимо <math>2^x(3^x - 9) - 2(3^x - 9) = 0</math>.</p> <p>Тепер можна винести за дужки спільний множник <math>3^x - 9</math>:</p> $(3^x - 9) \cdot (2^x - 2) = 0.$ <p>Тоді <math>3^x - 9 = 0</math> або <math>2^x - 2 = 0</math>. Одержуємо два рівняння:                  1) <math>3^x = 9</math>, тоді <math>x = 2</math>; 2) <math>2^x = 2</math>, тоді <math>x = 1</math>.</p> <p><i>Відповідь:</i> 2; 1</p>
---	--

Таблиця 27. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

1. Графік показникової функції $y = a^x$ ( $a > 0$ і $a \neq 1$ )	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 <p>Функція зростає</p>	 <p>Функція спадає</p>
2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ Знак нерівності зберігається	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ Знак нерівності змінюється на протилежний
Приклади	
$2^{x-3} > 4.$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>2^{x-3} &gt; 2^2</math>.                      Функція <math>y = 2^t</math> є зростаючою, отже: <math>x - 3 &gt; 2</math>,  <math>x &gt; 5</math>.</p> <p><i>Відповідь:</i> <math>(5; +\infty)</math></p>	$(0,7)^{x-3} > 0,49.$ <p><i>Розв'язання.</i> <math>(0,7)^{x-3} &gt; (0,7)^2</math>.                      Функція <math>y = 0,7^t</math> є спадною, отже: <math>x - 3 &lt; 2</math>, <math>x &lt; 5</math>.</p> <p><i>Відповідь:</i> <math>(-\infty; 5)</math></p>



3. Розв'язування більш складних показникових нерівностей	
Орієнтир	Приклад
<p><b>I. За допомогою рівносильних перетворень</b> (за схемою розв'язування показникових рівнянь, табл. 26) <b>задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду</b> (квадратної, дробової тощо). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей</p>	<p style="text-align: center;"><math>4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 &gt; 0.</math></p> <p><i>Розв'язання.</i> Заміна <math>2^x = t</math> дає нерівність <math>4t^2 + 7t - 2 &gt; 0</math>, розв'язки якої <math>t &lt; -2</math> або <math>t &gt; \frac{1}{4}</math> (див. рисунок). Обернена заміна дає <math>2^x &lt; -2</math> (розв'язків немає) або <math>2^x &gt; \frac{1}{4}</math>, звідки <math>2^x &gt; 2^{-2}</math>, тобто <math>x &gt; -2</math>.</p> <p><i>Відповідь:</i> <math>(-2; +\infty)</math></p> 
<p><b>II. Застосовуємо загальний метод інтервалів</b>, зводячи задану нерівність до виду <math>f(x) \geq 0</math> і використовуючи таку схему.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Знайти ОДЗ.</li> <li>2. Знайти нулі <math>f(x)</math>.</li> <li>3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак <math>f(x)</math> у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.</li> <li>4. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності</li> </ol>	<p style="text-align: center;"><math>3^x + 4^x &gt; 7.</math></p> <p><i>Розв'язання.</i> Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності <math>3^x + 4^x - 7 &gt; 0</math>. Позначимо <math>f(x) = 3^x + 4^x - 7</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ОДЗ: <math>x \in \mathbf{R}</math>.</li> <li>2. Нулі функції: <math>f(x) = 0</math>. <math>3^x + 4^x - 7 = 0</math>. Оскільки функція <math>f(x) = 3^x + 4^x - 7</math> є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення, що дорівнює нулю, вона набуває тільки в одній точці області визначення: <math>x = 1</math> (<math>f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0</math>).</li> <li>3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак <math>f(x)</math> у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності <math>f(x) &gt; 0</math>.</li> </ol>  <p><i>Відповідь:</i> <math>(1; +\infty)</math></p>

Таблиця 28. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ

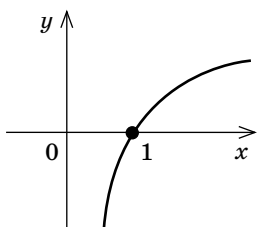
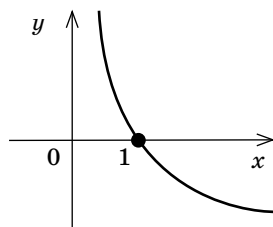
1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь	
Орієнтир	Приклад
<p>Якщо <math>a</math> — число (<math>a &gt; 0</math> і <math>a \neq 1</math>), то</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math>\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c</math> </div> <p>(використовуємо означення логарифма)</p>	<p style="text-align: center;"><math>\log_3(x-1) = 2.</math></p> <p><i>Розв'язання.</i> <math>x-1 = 3^2</math>; <math>x = 10</math>.</p> <p><i>Відповідь:</i> 10</p>

Продовження таблиці 28

2. Використання рівнянь-наслідків	
Орієнтир	Приклад
<p>Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної рівності, то гарантовано одержуємо рівняння-наслідок.</p> <p>При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування</p>	$\log_x(x+2)=2.$ <p><i>Розв'язання.</i> За означенням логарифма одержуємо: <math>x+2=x^2</math>; <math>x^2-x-2=0</math>; <math>x_1=-1</math>, <math>x_2=2</math>.</p> <p>Перевірка. <math>x=-1</math> — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число); <math>x=2</math> — корінь (<math>\log_2(2+2)=2</math>, <math>\log_2 4=2</math>, <math>2=2</math>).</p> <p><i>Відповідь:</i> 2</p>
3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь	
ЗАМІНА ЗМІННИХ	
Орієнтир	Приклад
<p>Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою ( новою змінною )</p>	$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0.$ <p><i>Розв'язання.</i> Заміна: <math>\lg x = t</math>. <math>t^2 - 2t - 3 = 0</math>; <math>t_1 = -1</math>, <math>t_2 = 3</math>. Отже, <math>\lg x = -1</math> або <math>\lg x = 3</math>. Тоді <math>x = 10^{-1} = 0,1</math> або <math>x = 10^3 = 1000</math>.</p> <p><i>Відповідь:</i> 0,1; 1000</p>
РІВНЯННЯ ВИДУ $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ( $a > 0$ і $a \neq 1$ )	
Орієнтир	Приклад
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math display="block">\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) &gt; 0, \\ g(x) &gt; 0 \end{cases} \text{ОДЗ}</math> </div> <p>(враховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів)</p>	$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5).$ <p><i>Розв'язання.</i> ОДЗ: <math>\begin{cases} x^2 - 2 &gt; 0, \\ 4x - 5 &gt; 0. \end{cases}</math></p> <p>На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: <math>x^2 - 2 = 4x - 5</math>; <math>x^2 - 4x + 3 = 0</math>; <math>x_1 = 1</math>, <math>x_2 = 3</math>.</p> <p><math>x = 1</math> — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ); <math>x = 3</math> — корінь (задовольняє умови ОДЗ).</p> <p><i>Відповідь:</i> 3</p>

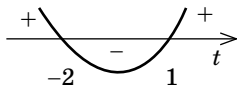
РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РІВНЯНЬ В ІНШИХ ВИПАДКАХ	
Орієнтир	Приклад
<p>1. Враховуємо ОДЗ заданого рівняння (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ).</p> <p>2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і в зворотному напрямках із збереженням правильної рівності</p>	<p><math>\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x+3)</math>.</p> <p>Розв'язання.</p> <p>ОДЗ: <math>\begin{cases} x+1 &gt; 0, \\ x+3 &gt; 0. \end{cases}</math></p> <p>На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:</p> $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3;$ $\log_2((x+1)(x+3)) = 3;$ $(x+1)(x+3) = 2^3;$ $x^2 + 4x - 5 = 0;$ $x_1 = 1, x_2 = -5.$ <p><math>x = 1</math> — корінь (задовольняє умови ОДЗ);  <math>x = -5</math> — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ).</p> <p>Відповідь: 1</p>

Таблиця 29. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

1. Графік функції $y = \log_a x$ ( $a > 0$ ; $a \neq 1$ )	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 <p>Функція зростає</p>	 <p>Функція спадає</p>
2. Рівносильні перетворення найпростіших логарифмічних нерівностей	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$
Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ	Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ

Приклади	
$\log_2(x-5) > 3.$ <p><i>Розв'язання.</i>                      ОДЗ: <math>x-5 &gt; 0</math>, тобто <math>x &gt; 5</math>.  <math display="block">\log_2(x-5) &gt; \log_2 2^3.</math>                     Функція <math>y = \log_2 t</math> є зростаючою, отже:  <math display="block">x-5 &gt; 2^3;</math> <math display="block">x &gt; 13.</math>                     Враховуючи ОДЗ, маємо <math>x &gt; 13</math>.                      Відповідь: <math>(13; +\infty)</math></p>	$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > 3.$ <p><i>Розв'язання.</i>                      ОДЗ: <math>x-5 &gt; 0</math>, тобто <math>x &gt; 5</math>.  <math display="block">\log_{\frac{1}{2}}(x-5) &gt; \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.</math>                     Функція <math>y = \log_{\frac{1}{2}} t</math> є спадною, отже:  <math display="block">x-5 &lt; \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad x &lt; 5\frac{1}{8}.</math>                     Враховуючи ОДЗ, маємо <math>5 &lt; x &lt; 5\frac{1}{8}</math>.                      Відповідь: <math>\left(5; 5\frac{1}{8}\right)</math></p>

**3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей**

Орієнтир	Приклад
<p><b>I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду.</b></p> <p><b>Схема рівносильних перетворень нерівності є такою.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Враховуємо ОДЗ заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ).</li> <li>2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і в зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності</li> </ol>	$\lg^2(10x) - \lg x \geq 3.$ <p><i>Розв'язання.</i>                      ОДЗ: <math>x &gt; 0</math>. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям:  <math display="block">(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geq 3, \quad (1 + \lg x)^2 - \lg x \geq 3.</math>                     Заміна <math>\lg x = t</math> дає нерівність <math>(1+t)^2 - t \geq 3</math>, тобто <math>t^2 + t - 2 \geq 0</math>, розв'язки якої <math>t \leq -2</math> або <math>t \geq 1</math> (див. рисунок).</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Обернена заміна дає <math>\lg x \leq -2</math> або <math>\lg x \geq 1</math>.                      Тоді <math>\lg x \leq \lg 10^{-2}</math> або <math>\lg x \geq \lg 10</math>.                      Враховуючи, що функція <math>y = \lg x</math> є зростаючою, одержуємо: <math>x \leq 10^{-2}</math> або <math>x \geq 10</math>.                      Після врахування ОДЗ маємо:  <math display="block">0 &lt; x \leq 0,01 \text{ або } x \geq 10.</math>                     Відповідь: <math>(0; 0,01] \cup [10; +\infty)</math></p>

<p><b>II. Застосовується загальний метод інтервалів</b> (задана нерівність зводиться до нерівності виду <math>f(x) \geq 0</math>) і <b>використовується така схема.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Знайти ОДЗ.</li> <li>2. Знайти нулі <math>f(x)</math>.</li> <li>3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак <math>f(x)</math> у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.</li> <li>4. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.</li> </ol>	<p style="text-align: center;"><math>\log_x(2x+3) &lt; 2.</math></p> <p><i>Розв'язання.</i></p> <p>Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності</p> $\log_x(2x+3) - 2 < 0.$ <p>Позначимо <math>f(x) = \log_x(2x+3) - 2.</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ОДЗ: <math>\begin{cases} 2x+3 &gt; 0, \\ x &gt; 0, \\ x \neq 1, \end{cases}</math> тобто <math>\begin{cases} x &gt; 0, \\ x \neq 1. \end{cases}</math></li> <li>2. Нулі функції: <math>f(x) = 0. \log_x(2x+3) - 2 = 0.</math> Тоді <math>\log_x(2x+3) = 2.</math> На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню <math>2x+3 = x^2</math> (яке одержуємо за означенням логарифма). Тобто</li> </ol> $x^2 - 2x - 3 = 0; x_1 = -1, x_2 = 3.$ <p>До ОДЗ входить тільки <math>x = 3</math>, отже, <math>f(x)</math> має тільки єдиний нуль функції <math>x = 3</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак <math>f(x)</math> у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності <math>f(x) &lt; 0.</math></li> </ol> <div style="text-align: center;"> </div> <p><i>Відповідь:</i> <math>x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)</math></p>
---	--

Таблиця 30. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

1. Системи рівнянь	
ПОНЯТТЯ СИСТЕМИ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗКІВ	ПРИКЛАДИ
<p>Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв'язки двох (або більше) рівнянь з однією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв'язати <b>систему рівнянь</b>. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою.</p> <p><b>Розв'язком системи називається таке значення змінної або такий впорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всі рівняння системи.</b></p> <p><b>Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.</b> Якщо система не має розв'язку, то її називають <b>несумісною</b></p>	$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ — система двох рівнянь з двома змінними. Пара чисел $(5; 1)$ , тобто $\begin{cases} x = 5, \\ y = 1, \end{cases}$ — розв'язок системи
<p><b>Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.</b> Якщо система не має розв'язку, то її називають <b>несумісною</b></p>	$\begin{cases} x^2 - y + z = 0, \\ xy + xz + yz = 19, \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ — система трьох рівнянь з трьома змінними. Трійка чисел $(1; 4; 3)$ , тобто $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = 3, \end{cases}$ — один із розв'язків системи

## 2. Рівносильність систем рівнянь

Дві системи рівнянь називаються *рівносильними на деякій множині*, якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої, і навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).

Якщо змінити порядок запису рівнянь заданої системи, то одержимо систему, рівносильну заданій.

Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то одержимо систему, рівносильну заданій

*Областю допустимих значень (ОДЗ) системи* називається спільна область визначення всіх функцій, що входять до запису цієї системи.

Усі рівносильні перетворення систем виконуються на ОДЗ початкової системи

## 3. Основні способи розв'язування систем рівнянь

## СПОСІБ ПІДСТАНОВКИ

Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (чи через інші) і підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної у всі інші рівняння системи (потім розв'язуємо одержане рівняння чи систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної)

Приклад. Розв'язати систему 
$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння системи  $y = 2x - 3$ . Підставляємо одержаний для  $y$  вираз в друге рівняння системи й одержуємо  $x + 2x - 3 = 3$ . Звідси  $x = 2$ . Тоді  $y = 2x - 3 = 1$ .

Відповідь: (2; 1)

## СПОСІБ ДОДАВАННЯ

Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число  $\alpha \neq 0$ , і другого рівняння, помноженого на число  $\beta \neq 0$  (а всі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій

Приклад. Розв'язати систему 
$$\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини першого рівняння системи на 2, а другого — на 3 (щоб одержати як коефіцієнти при змінній  $y$  протилежні числа) і почленно додамо одержані рівняння одне до одного. З останнього одержаного рівняння знаходимо значення  $x$ , підставляємо результат у будь-яке рівняння системи і знаходимо значення  $y$ :

$$\begin{array}{r} \left. \begin{array}{l} 5x - 3y = 9, \cdot 2 \\ 3x + 2y = 13 \cdot 3 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{array} \right\} + \\ \hline 19x = 57, \\ x = 3. \end{array}$$

Тоді  $3 \cdot 3 + 2y = 13$ ;  $2y = 4$ ;  $y = 2$ .

Відповідь: (3; 2)

**ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ**

Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній — ці координати і є розв'язками системи

**Приклади**

1. Розв'язати графічно систему  $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна системі  $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

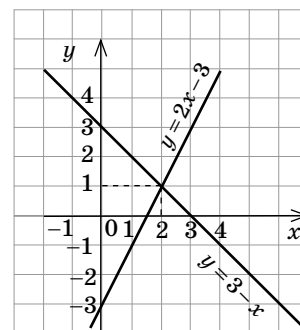
Графіком кожного з рівнянь системи є пряма. Для побудови прямої досить побудувати дві її точки. Наприклад, для

$y = 2x - 3$ :

$x$	0	1
$y$	-3	-1

$y = 3 - x$ :

$x$	0	1
$y$	3	2



Графіки перетинаються в єдиній точці  $M(2; 1)$ .

Отже, пара чисел  $(2; 1)$  — єдиний розв'язок заданої системи.

Відповідь:  $(2; 1)$

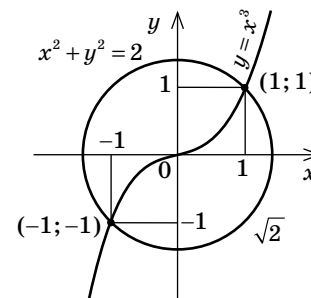
2. Розв'язати графічно систему  $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна системі  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$

Графік першого рівняння — коло радіуса  $\sqrt{2}$  з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола  $y = x^3$ .

Ці два графіки перетинаються у двох точках з координатами  $(-1; -1)$  і  $(1; 1)$ .

Відповідь:  $(-1; -1)$  і  $(1; 1)$  — розв'язки системи



## Тестові завдання до розділу 2 «Рівняння та нерівності»

Завдання 1–52 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\sqrt{x-3} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
1; -2	1	1; -2; 3	Коренів немає	3

*Розв'язання.* Оскільки під знаком кореня парного степеня можуть стояти тільки невід'ємні вирази, то область допустимих значень (ОДЗ) заданого рівняння задається системою  $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x-3 \geq 0, \end{cases}$  розв'язком якої є  $x \geq 3$ . Добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли один із множників дорівнює нулю, а всі інші множники існують:  $\sqrt{x-1} = 0$  при  $x = 1$ ;  $\sqrt{x+2} = 0$  при  $x = -2$ ;  $\sqrt{x-3} = 0$  при  $x = 3$ . Значення  $x = 1$  і  $x = -2$  не входять до ОДЗ заданого рівняння, отже, вони не є коренями заданого рівняння. Значення  $x = 3$  входить до ОДЗ (і всі перетворення були рівносильними на ОДЗ), отже,  $x = 3$  є коренем заданого рівняння. Тобто правильна відповідь Д.

2. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+3}\sqrt{x-2}\sqrt{x-5} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
2; 5	5	-3; 2; 5	Коренів немає	-3; 2

3. Знайдіть корінь (або добуток усіх коренів, якщо їх декілька) рівняння  $\sqrt{2x^2 - x - 2} = x - 4$ .

А	Б	В	Г	Д
-9	-7	2	Коренів немає	7

*Розв'язання.* Використаємо для розв'язування рівняння-наслідки. Для цього піднесемо обидві частини заданого рівняння до квадрата (при цьому всі корені заданого рівняння залишаться серед коренів одержаного):  $2x^2 - x - 2 = (x - 4)^2$ . Тоді одержуємо:  $x^2 + 7x - 18 = 0$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -9$ . Перевіримо одержані корені. Для цього підставимо їх в задане рівняння. При  $x = 2$  одержуємо неправильну рівність ( $2 = -2$ ). При  $x = -9$  також одержуємо неправильну рівність ( $13 = -13$ ). Отже, задане рівняння не має коренів, тобто правильна відповідь Г.



4. Знайдіть корінь (або суму всіх коренів, якщо їх декілька) рівняння  $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2x - 4$ .

А	Б	В	Г	Д
2	-5	5	Коренів немає	3

5. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 1$ . (До відповіді запишіть корінь рівняння, якщо він один, або добуток усіх коренів, якщо їх декілька.)

А	Б	В	Г	Д
-2	-4	-6	8	16

6. Розв'яжіть нерівність  $x + \frac{1}{x-5} > \frac{1}{x-5} + 3$ .

А	Б	В	Г	Д
(3; 5)	(3; +∞)	(-∞; 3) ∪ (5; +∞)	(-∞; 5) ∪ (5; +∞)	(3; 5) ∪ (5; +∞)

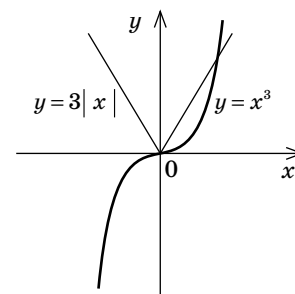
7. Укажіть загальну кількість коренів рівняння  $\frac{2|x|}{x} = x$ .

А	Б	В	Г	Д
Один	Два	Три	Коренів немає	Безліч

8. Укажіть, скільки всього дійсних коренів має рівняння  $x^3 - 3|x| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Два	Три	Більше трьох

*Розв'язання.* Питання про кількість коренів рівняння можна дослідити графічно. Задане рівняння рівносильне рівнянню  $x^3 = 3|x|$ . Будемо графіки функцій  $y = x^3$  та  $y = 3|x|$  (див. рисунок). Як бачимо, ці графіки мають тільки дві точки перетину, отже, задане рівняння має тільки два корені. Тобто правильна відповідь **В**.



9. Скільки коренів має рівняння  $x^2 - 5|x| = 0$ ?

А	Б	В	Г	Д
Більше трьох	Три	Два	Один	Жодного

10. Знайдіть корінь рівняння  $3 - 2x = -\frac{9}{5}$ .

А	Б	В	Г	Д
-2,4	-1,2	1,2	2,4	4,8

11. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3x - 5y = 3, \\ 4x + 3y = -1. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(6; 3)	(2; -3)	$(\frac{4}{29}; -\frac{15}{29})$	(-4; -3)	$(-\frac{4}{29}; \frac{15}{29})$

12. Розв'яжіть нерівність  $a^2 < a$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$

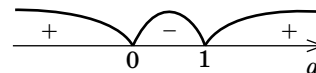
*Коментар.* Для розв'язування заданої нерівності можна вибрати або рівносильні перетворення, або метод інтервалів, або рівносильні перетворення і використання графічної ілюстрації.

*Розв'язання.*

I спосіб. Задана нерівність рівносильна нерівності  $a^2 - a < 0$ . Побудуємо ескіз графіка квадратичної функції  $y = a^2 - a$  (врахуємо, що  $a^2 - a = 0$ , тобто  $a(a - 1) = 0$ , при  $a = 0$  та при  $a = 1$ , — див. рисунок). Тоді розв'язок заданої нерівності  $0 < a < 1$ . Отже, правильна відповідь Г.



II спосіб. Задана нерівність рівносильна нерівності  $a^2 - a < 0$ , тобто  $a(a - 1) < 0$ . Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів. ОДЗ:  $a \in \mathbf{R}$ . Нулі:  $f(a) = a(a - 1)$ ;  $f(a) = 0$ ,  $a(a - 1) = 0$ , тоді  $a = 0$  або  $a = 1$ . Зображуємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок). Тоді розв'язок заданої нерівності — проміжок  $(0; 1)$ . Отже, правильна відповідь Г.



III спосіб. Задана нерівність рівносильна нерівностям:  $a^2 - a < 0$ ;  $a(a - 1) < 0$ . Враховуючи, що *добуток двох виразів буде від'ємним тоді і тільки тоді, коли множники будуть мати різні знаки*, одержуємо,

що остання нерівність рівносильна сукупності систем  $\begin{cases} a < 0, \\ a - 1 > 0 \end{cases}$  або  $\begin{cases} a > 0, \\ a - 1 < 0. \end{cases}$  Тоді  $\begin{cases} a < 0, \\ a > 1 \end{cases}$  або  $\begin{cases} a > 0, \\ a < 1. \end{cases}$  Перша система розв'язків не має, а

з другої нерівності одержуємо:  $0 < a < 1$ . Отже, правильна відповідь Г.

13. Розв'яжіть нерівність  $x^2 > x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

14. Розв'яжіть нерівність  $\frac{4}{x^2} > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(-2; 2)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 2)$	$(-2; 0) \cup (0; 2)$

*Розв'язання.*

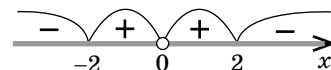
**I спосіб.** Нерівність можна розв'язати методом інтервалів, звівши її до виду  $f(x) > 0$ . Задана нерівність рівносильна нерівностям

$$\frac{4}{x^2} - 1 > 0; \frac{4 - x^2}{x^2} > 0 \quad (*).$$

1) ОДЗ:  $x \neq 0$ .

2) Нулі функції ( $f(x) = 0$ ):  $\frac{4 - x^2}{x^2} = 0$ ;  $4 - x^2 = 0$ ;  $x^2 = 4$ ;  $x = \pm 2$ .

3) Позначаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак функції  $f(x)$  у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок).



4) Записуємо відповідь, враховуючи знак нерівності (\*):

$$x \in (-2; 0) \cup (0; 2).$$

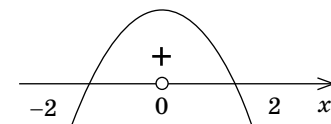
Тобто правильна відповідь Д.

**II спосіб** (рівносильні перетворення нерівності  $\frac{4}{x^2} > 1$ ).

ОДЗ:  $x \neq 0$ . На ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям:

$$\frac{4}{x^2} - 1 > 0; \frac{4 - x^2}{x^2} > 0.$$

Оскільки при  $x \neq 0$  значення  $x^2 > 0$ , то на ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності  $4 - x^2 > 0$ , яка має розв'язки  $x \in (-2; 2)$  (див. рисунок). Враховуючи ОДЗ, одержуємо розв'язок заданої нерівності:  $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$ . Тобто правильна відповідь Д.



15. Розв'яжіть нерівність  $\frac{x-2}{x+5} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-5; 2]$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; -5) \cup [2; +\infty)$	$[-5; 2]$	$(-\infty; -5) \cup (-5; 2)$

16. Розв'яжіть нерівність  $(3-x)(6+x) > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-6; 3)$	$(-3; 6)$	$(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$

17. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 5x - y = -10, \\ x + 3y = 14. \end{cases}$  Укажіть значення суми  $x + y$  для знайденого розв'язку системи.

А	Б	В	Г	Д
2	0	4	-4	-2

18. Знайдіть розв'язок системи  $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 2x + 4y = -1. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$\left(1; \frac{1}{4}\right)$	(2;1)	$\left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{20}\right)$	$\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{5}; -\frac{13}{20}\right)$

19. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 5\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8, \\ 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$  Знайдіть суму  $x + y$  для одержаного розв'язку системи.

А	Б	В	Г	Д
2	5	8	10	18

20. Розв'яжіть рівняння  $\cos x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

*Вказівка.* Врахувати, що  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ .

21. Розв'яжіть рівняння  $\cos(\pi - x) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sqrt{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

*Розв'язання.* Використовуючи формули зведення та формулу  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ , одержуємо:  $-\cos x + 2\left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x\right) = \sqrt{3}$ ;  $-\cos x + 2\left(\frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x\right) = \sqrt{3}$ ;  $-\cos x + \cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = \sqrt{3}$ ;  $\sin x = -1$ ;  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ . Тобто правильна відповідь Г.

22. Розв'яжіть рівняння  $\cos(\pi + x) = \sin \frac{\pi}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{4} + \pi t, t \in \mathbf{Z}$	$2\pi l, l \in \mathbf{Z}$	$\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

23. Розв'яжіть рівняння  $9\sin 4x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{36} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{4} n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi n}{9}, n \in \mathbf{Z}$

24. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

25. Розв'яжіть рівняння  $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi t, t \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

26. Розв'яжіть рівняння  $\sin 2x = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$-\pi + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$	$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$

27. Розв'яжіть рівняння  $\cos 2x = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

28. Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Інша відповідь

29. Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3$ .

А	Б	В	Г	Д
3	$3 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{arctg} 3$	$\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

30. Розв'яжіть рівняння  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

31. Розв'яжіть рівняння  $2\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

32. Розв'яжіть рівняння  $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

33. Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{ctg}(3x) = 9$ .

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 9 + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$	$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 9 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$3 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

34. Розв'яжіть рівняння  $2\cos x \sin x = \sqrt{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

35. Розв'яжіть рівняння  $1 + \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

36. Розв'яжіть рівняння  $3\cos x - \sin 2x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

37. Розв'яжіть рівняння  $3\sin x = \sin 2x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

38. Розв'яжіть рівняння  $2\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{4} + \pi r, r \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

39. Розв'яжіть рівняння  $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

40. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{3} + \cos x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

41. Вкажіть корінь рівняння  $3\cos 2x + 16\cos x - 3 = 0$ , який належить відрізку  $[0; \pi]$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2}$	0	$\arccos \frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	Коренів немає

*Розв'язання.* Зведемо в заданому рівнянні всі тригонометричні вирази до одного аргументу і до однієї функції. Враховуючи, що  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ , одержуємо рівняння:  $3(2\cos^2 x - 1) + 16\cos x - 3 = 0$ ;  $6\cos^2 x + 16\cos x - 6 = 0$ . Заміна  $\cos x = t$  дає рівняння:  $6t^2 + 16t - 6 = 0$ ;  $3t^2 + 8t - 3 = 0$ ;  $t_1 = -3$  або  $t_2 = \frac{1}{3}$ . Виконуючи обернену заміну, маємо:  $\cos x = -3$  (рівняння не має коренів) або  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Але за умовою не просять знайти всі корені цього рівняння ( $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ ), а тільки вказати розв'язок із відрізка  $[0; \pi]$ . За означенням це  $x = \arccos \frac{1}{3}$ . Отже, правильна відповідь **В**.

42. Укажіть кількість коренів рівняння  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$ , які належать відрізку  $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

43. Знайдіть усі розв'язки рівняння  $\cos^2 2x = 2\cos 2x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	Коренів немає

44. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt[3]{9^x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{5}$



45. Якщо  $5^x = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ , то  $x =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	3

46. Розв'яжіть нерівність  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{243}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2]$	$(0; 2)$	$[2; +\infty)$	$(-\infty; -2]$	$(0; +\infty)$

47. Розв'яжіть нерівність  $0,6^{3x-1} > 0,36$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$(1; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	Інша відповідь

48. Розв'яжіть нерівність  $\log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; 5)$	$\left(\frac{1}{5}; 5\right)$	$(-\infty; 5)$	$(5; +\infty)$	$\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$

49. Розв'яжіть нерівність  $\log_{0,2} 10 < \log_{0,2} x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(10; +\infty)$	$(0; 10)$	$(0,1; 10)$	$(-10; 0)$	$(-\infty; 10)$

50. Розв'яжіть нерівність  $\log_{\frac{1}{6}} 5 \cdot \log_6 x > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; 4)$	$(0; 1)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

*Розв'язання.* ОДЗ:  $x > 0$ . Оскільки  $\log_{\frac{1}{6}} 5 < 0$ , то при діленні обох частин заданої нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний, тому задана нерівність рівносильна нерівності  $\log_6 x < 0$ . Враховуючи, що  $0 = \log_6 1$ , одержуємо нерівність  $\log_6 x < \log_6 1$ , з якої отримуємо нерівність  $x < 1$  (оскільки функція  $y = \log_6 t$  є зростаючою, при переході до аргументів знак нерівності не змінюється). Враховуючи ОДЗ, одержуємо  $0 < x < 1$ . Отже, правильна відповідь **В**.

51. Розв'яжіть нерівність  $\log_{\frac{1}{5}} 4 \cdot \log_9 x > \log_{\frac{1}{5}} 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; 9)$	$(0; 1)$	$(9; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

52. Задано рівняння:

$$\log_5 x - \log_5(x-3) = 1; \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \sqrt{5}; \quad (2)$$

$$|x+2| = -3; \quad (3)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Укажіть ті рівняння, які не мають коренів на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
(1) і (4)	(2) і (3)	(1) і (2)	(3) і (4)	Інша відповідь

*Коментар.* Щоб сказати, мають чи не мають корені рівняння (2), (3) і (4), досить оцінити їх праві частини (як правило, починають міркування з найпростішого рівняння; у даному випадку це рівняння (3)). Але для рівняння (1) такий спосіб міркувань не проходить — це рівняння доведеться розв'язувати, щоб впевнитися, що воно має корені (чи не має їх). Вибираючи відповідь, слід пам'ятати, що повинні бути вказані *всі* рівняння, які *не мають* дійсних коренів.

*Розв'язання.* У правій частині рівняння (3) стоїть від'ємне число  $(-3)$ , але модуль не може бути від'ємним, отже, рівняння (3) не має коренів.

Оскільки  $\pi \approx 3,14$ , то в правій частині рівняння (4) стоїть число, яке за модулем більше 1  $\left(\frac{\pi}{2} \approx 1,57\right)$ , але косинус за модулем не може перевищувати 1, отже, рівняння (4) не має коренів.

Враховуючи, що  $\sqrt{5} \approx 2,2$  (достатньо навіть «грубої» оцінки, що « $\sqrt{5}$  — це дві цілих і скільки-то десятих»), одержуємо, що  $2 - \sqrt{5} \approx -0,2$  — за модулем не перевищує 1, отже, рівняння (2) має корені.

Розв'яжемо рівняння (1) (наприклад, використовуючи рівносильні перетворення рівнянь).

ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ x-3 > 0. \end{cases}$  З рівняння (1) одержуємо, що  $\log_5 \frac{x}{x-3} = 1$ . Тоді за означенням логарифма

$$\frac{x}{x-3} = 5^1. \text{ Звідси: } x = 5x - 15; x = \frac{15}{4} \text{ (задовольняє умови ОДЗ), отже, рівняння (1) має корінь.}$$

Таким чином, із заданих рівнянь рівняння (1) і (2) мають корені, а рівняння (3) і (4) не мають коренів. Отже, правильна відповідь Г.

Розв'яжіть завдання 53–100. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу.

53. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{-x}$ . Якщо рівняння має декілька коренів, у відповідь запишіть їх добуток.

Відповідь: \_\_\_\_\_

54. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$ . Якщо рівняння має декілька коренів, у відповідь запишіть їх суму.

Відповідь: \_\_\_\_\_

55. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{8x^2 - 7} = 3 - 2x$ . Якщо рівняння має декілька коренів, у відповідь запишіть їх суму.

Відповідь: \_\_\_\_\_

56. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{11+3x-x^2} = x+3$ . Якщо рівняння має декілька коренів, у відповідь запишіть їх суму.

Відповідь: \_\_\_\_\_

57. Обчисліть суму коренів рівняння  $(x^2 - 3x - 4)\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

58. Розв'яжіть рівняння  $(x^2 - 16)\sqrt{9 + 8x - x^2} = 0$ . У відповідь запишіть суму коренів.

Відповідь: \_\_\_\_\_

59. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x^2 - 8} + \sqrt{x^2 + 7} = 14 - x^2$ . У відповідь запишіть найменший корінь.

*Розв'язання.* Виконавши заміну  $x^2 = t$ , одержуємо рівняння  $\sqrt{t-8} + \sqrt{t+7} = 14-t$ . Це рівняння має корінь  $t=9$  ( $\sqrt{9-8} + \sqrt{9+7} = 14-9$ ;  $\sqrt{1} + \sqrt{16} = 5$ ;  $5=5$ ). Інших коренів це рівняння не має, оскільки в лівій його частині стоїть зростаюча функція  $f(t) = \sqrt{t-8} + \sqrt{t+7}$  (як сума двох зростаючих функцій), а в правій — спадна  $g(t) = 14-t$ . Тоді рівняння  $f(t) = g(t)$  може мати тільки єдиний корінь  $t=9$ . Виконуючи обернену заміну, одержуємо:  $x^2 = 9$ ;  $x = \pm 3$ . Отже, найменшим коренем заданого рівняння є  $x = -3$ .

Відповідь:  $-3$ .

60. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 1} = 4 - x^2$ . У відповідь запишіть найбільший корінь.

Відповідь: \_\_\_\_\_

61. Виберіть дві нерівності із запропонованих (1–4) і вставте їх у твердження так, щоб воно було завжди правильним: «Якщо \_\_\_\_\_, то \_\_\_\_\_».

- 1)  $|x| > 7$ ;    2)  $|x| < 3$ ;    3)  $x > 1$ ;    4)  $x < -9$ ;    5)  $0 < x < 6$ .

Номери вибраних нерівностей запишіть у бланк відповідей у тому порядку, в якому вони вставлені у твердження.

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Використайте той факт, що твердження «Якщо  $A$ , то  $B$ » для нерівностей буде правильним тоді і тільки тоді, коли множина розв'язків нерівності  $A$  буде підмножиною розв'язків нерівності  $B$ . Отже, для розв'язування цього завдання можна зобразити розв'язки кожної нерівності штриховкою на числовій прямій (для цього зручно зобразити п'ять паралельних числових прямих так, щоб їх початки були розташовані на одній вертикальній прямій і одиничні відрізки були б однакові; розв'язок кожної з нерівностей 1–5 слід заштрихувати на окремій числовій прямій). Після цього досить визначити, який із заштрихованих проміжків на одній прямій (для нерівності  $A$ ) повністю міститься в заштрихованому проміжку на іншій прямій (для нерівності  $B$ ), і записати до відповіді двоцифрове число (перша цифра — це номер нерівності  $A$ , а друга цифра — це номер нерівності  $B$ ).

62. Швидкість руху потяга становить  $72 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ . Якою є довжина потяга (у метрах), якщо відомо, що він проходить повз нерухомого спостерігача за 10 с?

Відповідь: \_\_\_\_\_

63. Від міста  $A$  до міста  $B$  вниз за течією річки відходить моторний човен. Одночасно з цим повз місто  $A$  пропливає пліт. Досягнувши міста  $B$ , човен розвертається і пливе назад. Визначте, у скільки разів власна швидкість руху човна більша за швидкість течії, якщо, повертаючись, човен зустрів пліт посередині між містами  $A$  та  $B$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

64. Вкладник поклав до банку певну суму грошей в умовних одиницях на два різні рахунки: один — з річним прибутком 10%, другий — 12%. Річний прибуток за двома вкладками становив 56 ум. од. Якщо внесені на різні рахунки кошти поміняти місцями, то річний прибуток становитиме 54 ум. од. Яку загальну суму грошей вніс вкладник на обидва рахунки?

Відповідь: \_\_\_\_\_

65. Мотоцикліст проїхав від села до озера 60 км. На зворотному шляху він зменшив швидкість руху на  $10 \frac{\text{км}}{\text{год}}$  і тому витратив часу на 0,3 год більше. Скільки часу (у годинах) витратив мотоцикліст на зворотний шлях?

Відповідь: \_\_\_\_\_

66. На 80 км шляху велосипедист витрачає на 2 год більше, ніж мотоцикліст, оскільки швидкість його руху на  $20 \frac{\text{км}}{\text{год}}$  менше. Обчисліть швидкість руху велосипедиста.

Відповідь: \_\_\_\_\_

67. Катер пройшов за течією 36 км і проти течії 48 км, витративши на весь шлях 6 год. Яка швидкість руху катера в стоячій воді, якщо швидкість течії становить  $3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ ?

Відповідь: \_\_\_\_\_

68. Два слюсарі виконали завдання за 6 год. Якби половину завдання виконав перший слюсар, а частину, що залишилася, другий, то першому було б потрібно часу на 2,5 год більше, ніж другому. За скільки годин перший із слюсарів міг би виконати завдання?

Відповідь: \_\_\_\_\_

69. Із посудини, заповненої чистим спиртом, відлили 6 л. Потім долили в неї стільки ж літрів води й одержали суміш, що містить 80% спирту. Визначте місткість посудини.

Відповідь: \_\_\_\_\_

70. Пройшовши половину шляху, потяг збільшив швидкість свого руху на  $30 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ . З якою швидкістю пройшов потяг першу половину шляху, якщо середня швидкість його руху на всьому шляху дорівнювала  $72 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ ?

Відповідь: \_\_\_\_\_

71. У розчин, що містить 40 г солі, додали 100 г води. У результаті концентрація солі в розчині зменшилася на 2%. Знайдіть початкову масу розчину (у грамах).

Відповідь: \_\_\_\_\_

72. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності  $(x+7)(x-6)^2(x-3)^5 < 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

73. Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності  $(x-7)(x+2)^2(x^2-7x+10) \geq 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

74. Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності  $\frac{x^2+3x-4}{|x+3|} < 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

75. Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2-5x+4}{x^2-20x} \leq 0$ . У відповідь запишіть найбільше число, яке задовольняє задану нерівність.

Відповідь: \_\_\_\_\_

76. Укажіть кількість цілих розв'язків нерівності  $\frac{(x-5)^4(2-x)}{(x-3)^2(x-8)} > 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

77. Укажіть найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності

$$\frac{x^2 - x + 5}{x^2 - 9x + 14} \leq 0.$$

Відповідь: \_\_\_\_\_

78. Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності

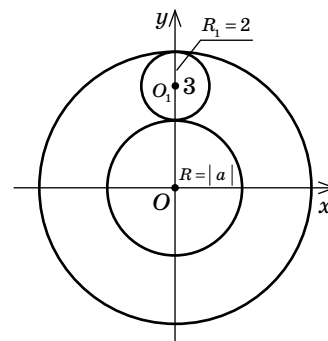
$$\frac{(x-3)(x+8)(x^2+9)}{(x^2-9)} < 0.$$

Відповідь: \_\_\_\_\_

79. Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при яких система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок.}$$

*Коментар.* Оскільки в задачі не вимагають знайти розв'язки системи і для кожного з рівнянь системи можна легко побудувати графік, то для розв'язування задачі можна використати графічну ілюстрацію. При цьому слід врахувати, що при  $a = 0$  першому рівнянню системи  $(x^2 + y^2 = 0)$  задовольняє тільки одна пара чисел —  $(0; 0)$ , а при  $a \neq 0$  рівняння  $x^2 + y^2 = a^2$  є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом  $R = \sqrt{a^2} = |a|$ . Тому в розв'язанні доведеться розглянути два випадки:  $a = 0$  і  $a \neq 0$ .



*Розв'язання.* При  $a = 0$  одержуємо систему  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ x^2 + (y-3)^2 = 4. \end{cases}$  Оскільки

$x^2 \geq 0$  і  $y^2 \geq 0$ , а сума двох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці функції одночасно дорівнюють нулю, то перше

рівняння рівносильне системі  $\begin{cases} x^2 = 0, \\ y^2 = 0, \end{cases}$  з якої одержуємо  $x = 0, y = 0$ .

Але ця пара чисел не задовольняє друге рівняння заданої системи

$(9 \neq 4)$ . Отже, при  $a = 0$  задана система не має розв'язку і тому  $a = 0$

не задовольняє умову задачі.

При  $a \neq 0$  графіком рівняння  $x^2 + y^2 = a^2$  є коло з центром у початку координат і радіусом  $R = \sqrt{a^2} = |a|$ , а графіком рівняння  $x^2 + (y-3)^2 = 4$  є коло з центром у точці  $O_1(0; 3)$  і радіусом  $R_1 = \sqrt{4} = 2$  (див. рисунок). Розв'язки системи — це координати спільних точок цих двох кіл. Але два кола будуть мати єдину спільну точку тоді і тільки тоді, коли вони дотикаються (зовнішнім чи внутрішнім чином). Якщо кола дотикаються зовнішнім чином, то відстань між їх центрами дорівнює сумі радіусів ( $OO_1 = R + R_1$ ). Тоді  $3 = |a| + 2$ , тобто  $|a| = 1$ , отже,  $a = \pm 1$ . Якщо кола дотикаються внутрішнім чином, то відстань між їх центрами дорівнює різниці радіусів ( $OO_1 = R - R_1$ ). Тоді  $3 = |a| - 2$ , тобто  $|a| = 5$ , отже,  $a = \pm 5$ .

Таким чином, задана система має єдиний розв'язок тільки при  $a = \pm 1$  і при  $a = \pm 5$ . Найменшим із цих значень параметра є  $a = -5$ . Отже, до відповіді потрібно записати число  $-5$ .

*Відповідь:*  $-5$ .

80. Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-3)^2 = 4, \\ x \cdot y = 0 \end{cases}$  має єдиний розв'язок. Якщо таких значень параметра  $a$  декілька, то у відповідь запишіть їх добуток.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

81. Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

82. Знайдіть найбільше значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ |x| + y = a \end{cases}$  має розв'язком точно дві пари чисел  $(x_0; y_0)$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

83. Знайдіть найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому система рівнянь  $\begin{cases} y + x = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  має два розв'язки.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

84. Використовуючи графік функції  $f(x) = x^3 - 3x$ , знайдіть найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $x^3 - 3x = a$  має три різні корені.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

85. Укажіть кількість коренів рівняння  $2\cos^2 x - 5\cos(\pi - x) + 2 = 0$ , які задовольняють нерівність  $0 < x < 3\pi$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

86. Розв'яжіть рівняння  $\cos x = 1 + x^2$ .

*Розв'язання.* Оцінимо ліву і праву частини рівняння:  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ,  $1 + x^2 \geq 1$ . Оскільки функція  $f(x) = \cos x \leq 1$ , а  $g(x) = 1 + x^2 \geq 1$ , то рівність  $f(x) = g(x)$  можлива тоді і тільки тоді, коли обидві частини рівняння дорівнюють 1. Отже, задане рівняння рівносильне системі  $\begin{cases} \cos x = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$  Із другого рівняння одержуємо  $x = 0$ , що задовольняє і перше рівняння. Тоді  $x = 0$  — єдиний розв'язок системи, а отже, і єдиний корінь заданого рівняння.

*Відповідь:* 0.

87. Розв'яжіть рівняння  $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

88. Розв'яжіть рівняння  $2^{x+2} - 2^x = 12$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

89. Розв'яжіть рівняння  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{8}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

90. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x + 3^{y+2} = 30, \\ 2x + 3^y = 9 \end{cases}$ , та знайдіть суму  $x_0 + y_0$  для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

91. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 100, \\ 2^y \cdot 5^x = 1000. \end{cases}$  У відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ , якщо пара  $(x_0; y_0)$  є розв'язком системи рівнянь.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Слід перемножити рівняння системи і з одержаного рівняння знайти суму  $x + y$ , необхідну для запису відповіді.

92. Знайдіть добуток  $xy$ , якщо пара  $(x; y)$  є розв'язком системи рівнянь  $\begin{cases} 3^{2x+1} + 3^y = 54, \\ 3^{x+1} + 3^{y-1} = 18. \end{cases}$

*Відповідь:* \_\_\_\_\_



93. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3^{2x-y} = 81, \\ \log_3 x + \log_3 y = \log_3 30. \end{cases}$  Знайдіть найменшу суму  $x_0 + y_0$ , якщо  $(x_0; y_0)$  є розв'язком системи рівнянь.

Відповідь: \_\_\_\_\_

94. Визначте кількість цілих розв'язків нерівності  $\log_{30}(x-8) + \log_{30}(x-9) \leq 1$ .

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна системі  $\begin{cases} x-8 > 0, \\ x-9 > 0, \\ \log_{30}(x-8)(x-9) \leq \log_{30} 30. \end{cases}$

Тоді, враховуючи, що функція  $y = \log_{30} t$  є зростаючою, одержуємо рівносильні системи не-

рівностей:  $\begin{cases} x > 8, \\ x > 9, \\ (x-8)(x-9) \leq 30; \end{cases} \begin{cases} x > 9, \\ x^2 - 17x + 42 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 9, \\ 3 \leq x \leq 14; \end{cases} 9 < x \leq 14$ . В одержаному розв'язку

нерівності міститься тільки 5 цілих розв'язків (це числа 10, 11, 12, 13, 14).

Відповідь: 5.

95. Визначте кількість цілих розв'язків нерівності  $\log_{12}(x-6) + \log_{12}(x-7) \leq 1$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

96. Розв'яжіть рівняння  $\lg \log_3 \log_4 x = 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

97. Знайдіть суму коренів рівняння  $\log_5(x^2 - 3x)^2 - \log_5(1 - 2x)^2 = \log_5 4$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

98. Знайдіть найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $\log_7(x+3) = \log_7(2x-a)$  має корені.

Відповідь: \_\_\_\_\_

99. Знайдіть суму  $x + y$ , якщо пара  $(x; y)$  є розв'язком системи рівнянь  $\begin{cases} 7^{\log_6(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$

Відповідь: \_\_\_\_\_

100. Знайдіть найбільше значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $2x^3 + 3x^2 - 12x - a = 0$  має точно два корені.

*Розв'язання.*

Задане рівняння рівносильне рівнянню  $2x^3 + 3x^2 - 12x = a$ .

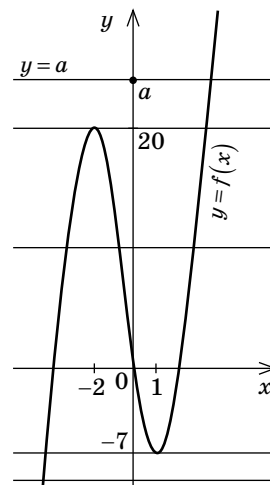
Розглянемо графічну ілюстрацію розв'язків цього рівняння. Для цього дослідимо функцію  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  за допомогою похідної і побудуємо її графік.

1.  $D(f) = \mathbf{R}$ .  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$  — існує на всій області визначення функції.

2. Критичні точки:  $f'(x) = 0$ ,  $6x^2 + 6x - 12 = 0$ , тоді  $x^2 + x - 2 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ .

3. Позначаємо критичні точки на області визначення функції, знаходимо знак  $f'(x)$  на кожному з одержаних проміжків і вказуємо проміжки зростання і спадання функції та екстремуми функції.

$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$20$	$\searrow$	$-7$	$\nearrow$
		<i>max</i>		<i>min</i>	



4. Будуємо ескіз графіка функції  $y = f(x)$  (графік проходить через початок координат, оскільки  $f(0) = 0$ ) і графіки прямих  $y = a$  при різних значеннях  $a$ .

5. Як бачимо, задане рівняння буде мати точно два корені тільки при  $a = -7$  і при  $a = 20$ . Найбільше з цих чисел 20.

*Відповідь: 20.*

Завдання 101 передбачає установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).\*

101. Установіть відповідність між заданими рівняннями (1–4) та проміжками (А–Д), де містяться всі корені відповідного рівняння.

- |  |               |
|--|---------------|
| 1 $\cos x = x^2 + 1$                         | А $(-20; -5)$ |
| 2 $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{8 - 2x^2} = x - 2$ | Б $(-5; 1)$   |
| 3 $\sqrt{x+7} +  x^2 - 49  = 0$              | В $(1; 50)$   |
| 4 $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$              | Г $(50; 80)$  |
|  | Д $(80; 100)$ |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

\* Приклади виконання таких завдань наведено на с. 4–5.

### Розділ 3

# ФУНКЦІЇ

## Основні поняття, формули, властивості до розділу 3 «Функції»

Таблиця 31. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКУ

Означення та зміст		Приклад																							
<p><b>Функцією</b> називають відповідність, при якій кожному значенню змінної <math>x</math> із деякої множини <math>D</math> відповідає єдине значення змінної <math>y</math>.</p> <p>У цьому випадку залежна змінна <math>y</math> також називається функцією від <math>x</math>.</p> <p>Змінна <math>x</math> називається <i>незалежною змінною</i> або <i>аргументом</i>.</p> <p><b>Множина <math>D</math></b> — <i>область визначення функції</i></p>		<p>Таблиця</p> <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>16</td> <td>25</td> <td>36</td> <td>49</td> <td>64</td> <td>81</td> </tr> </table> <p>задає функцію з областю визначення, яка складається з десяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.</p> <p>Цю саму функцію можна задати так: <math>y = x^2</math>, де <math>x</math> — цифра (у десятковій системі числення)</p>		$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$y$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9															
$y$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81															
<p>Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення (<math>D</math>), то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких задана формула має зміст</p>		<ol style="list-style-type: none"> <li>Для функції <math>y = x^2</math> область визначення — множина всіх дійсних чисел.</li> <li>Для функції <math>y = \frac{1}{x}</math> область визначення — множина всіх дійсних чисел, які не дорівнюють нулю (<math>D: x \neq 0</math>)</li> </ol>																							
<p><b>Область значень функції</b> — це множина тих значень, яких може набувати сама функція при всіх значеннях аргументу з області визначення</p>		<p>Для функції <math>y = x^2</math> область значень — <math>y \geq 0</math>, оскільки квадрат будь-якого числа завжди більше або дорівнює нулю</p>																							
Графік функції																									
<p><b>Графіком функції</b> називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенню аргументу, а ординати — відповідним значенням функції</p>		 <p>Графік функції <math>y = x^2</math> складається з усіх точок координатної площини з координатами:</p> <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-1</td> <td>0</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>1</td> <td>0</td> <td><math>\frac{1}{4}</math></td> <td>1</td> <td>4</td> <td>...</td> </tr> </table> <p>Графік функції <math>y = x^2</math> називається <i>параболою</i></p>		$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...	$y$	1	0	$\frac{1}{4}$	1	4	...								
$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...																			
$y$	1	0	$\frac{1}{4}$	1	4	...																			

Таблиця 32. ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЛАСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Вид функції	Обмеження, які враховують при знаходженні області визначення функції*	
1. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменник дроби не дорівнює нулю
2. $y = \sqrt[2k]{f(x)}$ ( $k \in \mathbf{N}$ )	$f(x) \geq 0$	Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз
3. $y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз
4. $y = \log_{f(x)} a$ ( $a > 0$ )	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці
5. $y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ( $k$ — ціле число)
6. $y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$	Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює $\pi k$ ( $k$ — ціле число)
7. $y = \arcsin(f(x))$	$ f(x)  \leq 1,$ тобто $-1 \leq f(x) \leq 1$	Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці
8. $y = \arccos(f(x))$		
9. $y = x^\alpha$	$x$ — будь-яке число	
а) $\alpha$ — натуральне число		
б) $\alpha$ — ціле від'ємне число або нуль		
в) $\alpha$ — додатне неціле число		
г) $\alpha$ — від'ємне неціле число	$x > 0$	

Таблиця 33. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

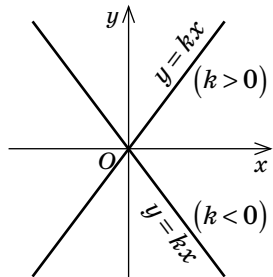
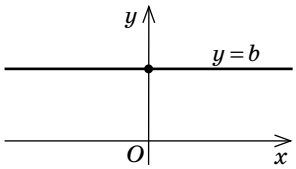
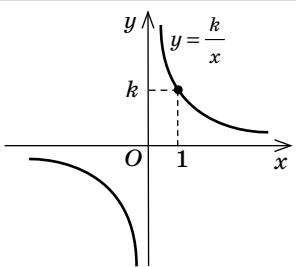
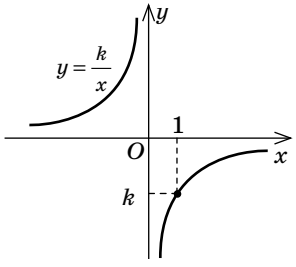
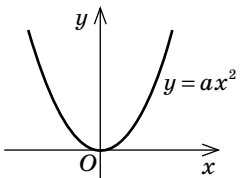
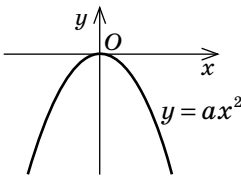
Зростаючі та спадні функції	
	<p><b>Функція <math>f(x)</math> зростаюча,</b></p> <p>якщо <math>x_2 &gt; x_1</math>, то <math>f(x_2) &gt; f(x_1)</math></p> <p>для всіх <math>x_1</math> і <math>x_2</math> із області визначення (при збільшенні аргументу відповідні точки графіка піднімаються)</p>

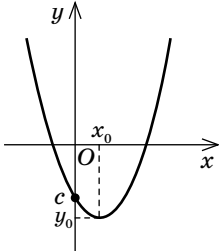
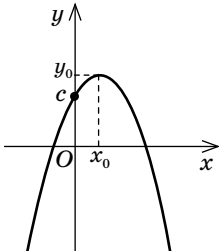
	<p><b>Функція <math>f(x)</math> спадна,</b></p> <p>якщо <math>x_2 &gt; x_1</math>, то <math>f(x_2) &lt; f(x_1)</math></p> <p>для всіх <math>x_1</math> і <math>x_2</math> із області визначення (при збільшенні аргументу відповідні точки графіка опускаються)</p>
<p><b>Парні та непарні функції</b></p>	
	<p><b>Функція <math>f(x)</math> парна:</b></p> <p><math>f(-x) = f(x)</math></p> <p>для всіх <math>x</math> із області визначення.</p> <p><b>Графік парної функції симетричний відносно осі <math>Oy</math></b></p>
	<p><b>Функція <math>f(x)</math> непарна:</b></p> <p><math>f(-x) = -f(x)</math></p> <p>для всіх <math>x</math> із області визначення.</p> <p><b>Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (точки <math>O</math>)</b></p>

Таблиця 34. **ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ**

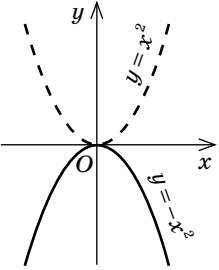
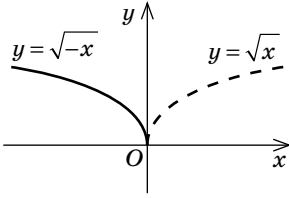
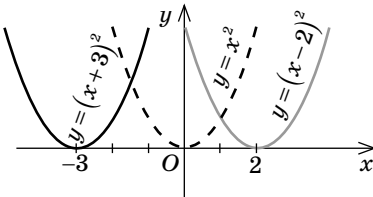
УМОВИ ДЛЯ КОЕФІЦІЕНТІВ	ГРАФІК	ВЛАСТИВОСТІ			
		$D(y)$	$E(y)$	ПАРНІСТЬ І НЕПАРНІСТЬ	ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ
1	2	3	4	5	6
<b>1. Лінійна функція <math>y = kx + b</math></b>					
$k > 0$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Ні парна, ні непарна	Зростає
$k < 0$					Спадає

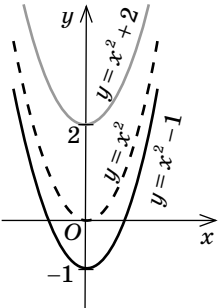
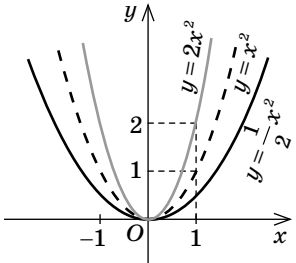
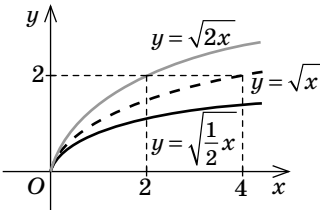
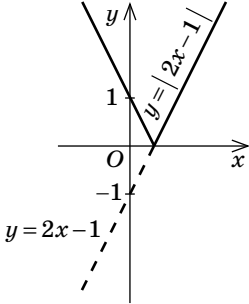
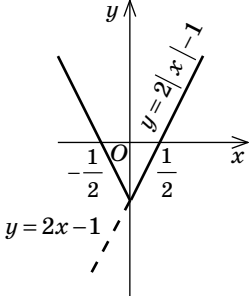
Продовження таблиці 34

1	2	3	4	5	6
$b = 0$ $y = kx$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Непарна	При $k > 0$ зростає
					При $k < 0$ спадає
$k = 0$ $y = b$			$b$	Парна	Стала
<b>2. Обернена пропорційність, функція <math>y = \frac{k}{x}</math> (<math>k \neq 0</math>)</b>					
$k > 0$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	Непарна	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
$k < 0$					Зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
<b>3. Функція <math>y = ax^2</math> (<math>a \neq 0</math>)</b>					
$a > 0$		$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$	Парна	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ ; зростає на про- міжку $[0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; 0]$		Зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ ; спадає на про- міжку $[0; +\infty)$

1	2	3	4	5	6
<b>4. Квадратична функція <math>y = ax^2 + bx + c</math> (<math>a \neq 0, x_0 = -\frac{b}{2a}</math>)</b>					
$a > 0$		$R$	$[y_0; +\infty)$	У загальному вигляді — ні парна, ні непарна	Спадає на проміжку $(-\infty; x_0]$ ; зростає на проміжку $[x_0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; y_0]$	При $b = 0$ функція $y = ax^2 + c$ парна	Зростає на проміжку $(-\infty; x_0]$ ; спадає на проміжку $[x_0; +\infty)$

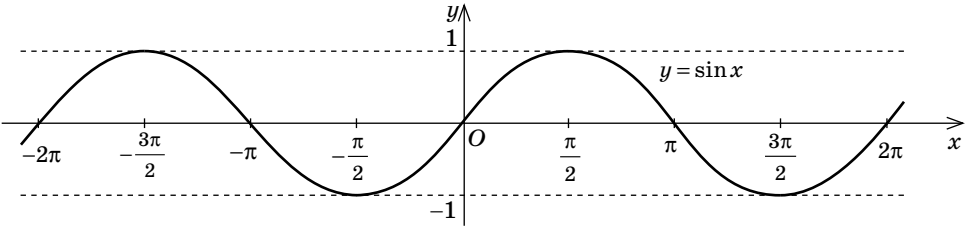
Таблиця 35. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ  $y = f(x)$

Формула залежності	Приклад	Перетворення
1. $y = -f(x)$		Симетрія відносно осі $Ox$
2. $y = f(-x)$		Симетрія відносно осі $Oy$
3. $y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі $Ox$ на $a$ одиниць

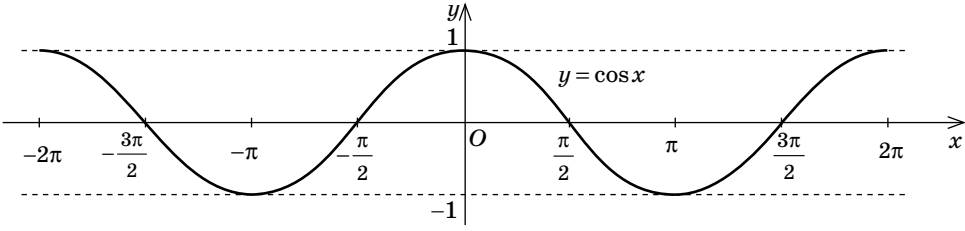
<p>4. <math>y = f(x) + c</math></p>		<p>Паралельне перенесення вздовж осі <math>Oy</math> на <math>c</math> одиниць</p>
<p>5. <math>y = kf(x)</math> (<math>k &gt; 0</math>)</p>		<p>Розтяг або стиск уздовж осі <math>Oy</math> (при <math>k &gt; 1</math> розтяг, при <math>0 &lt; k &lt; 1</math> — стиск)</p>
<p>6. <math>y = f(\alpha x)</math> (<math>\alpha &gt; 0</math>)</p>		<p>Розтяг або стиск уздовж осі <math>Ox</math> (при <math>\alpha &gt; 1</math> — стиск, при <math>0 &lt; \alpha &lt; 1</math> — розтяг)</p>
<p>7. <math>y =  f(x) </math></p>		<p>Вище осі <math>Ox</math> (і на самій осі) — без зміни; нижче осі <math>Ox</math> — симетрія відносно осі <math>Ox</math></p>
<p>8. <math>y = f( x )</math></p>		<p>Праворуч від осі <math>Oy</math> (і на самій осі) — без зміни; та сама частина графіка — симетрія відносно осі <math>Oy</math></p>



Таблиця 36. **ГРАФІК ФУНКЦІЇ  $y = \sin x$  ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ**

Графік функції $y = \sin x$ (синусоїда)	
	
Властивості функції $y = \sin x$	
1. Область визначення: $x \in \mathbf{R}$ ( $x$ — будь-яке дійсне число).	$D(\sin x) = \mathbf{R}$
2. Область значень: $y \in [-1; 1]$ .	$E(\sin x) = [-1; 1]$
3. Функція непарна: $\sin(-x) = -\sin x$ (графік симетричний відносно початку координат).	
4. Функція періодична з періодом $T = 2\pi$ : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .	
5. Точки перетину з осями координат: $Oy$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$	$Ox$ $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$
6. Проміжки знакосталості:	
$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$ $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$	
7. Проміжки зростання і спадання:	
функція $\sin x$ зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$ , і спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$ .	
8.	
Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ . Найменше значення функції дорівнює -1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ .	

Таблиця 37. **ГРАФІК ФУНКЦІЇ  $y = \cos x$  ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ**

Графік функції $y = \cos x$ (косинусоїда)	
	

**Властивості функції  $y = \cos x$**

1. Область визначення:  $x \in \mathbf{R}$  ( $x$  — будь-яке дійсне число).  $D(\cos x) = \mathbf{R}$

2. Область значень:  $y \in [-1; 1]$ .  $E(\cos x) = [-1; 1]$

3. Функція парна:  $\cos(-x) = \cos x$  (графік симетричний відносно осі  $Oy$ ).

4. Функція періодична з періодом  $T = 2\pi$ :  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ .

5. Точки перетину з осями координат:  $Oy$   $\begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases}$   $Ox$   $\begin{cases} y=0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

6. Проміжки знакосталості:

$$\cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$$

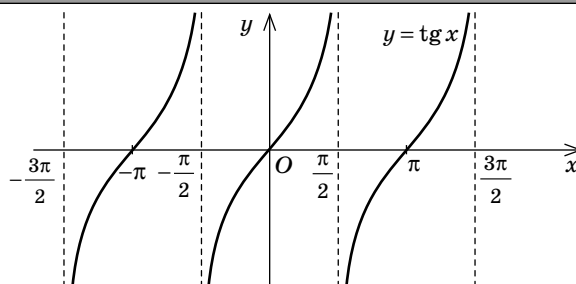
7. Проміжки зростання і спадання:

функція  $\cos x$  зростає на кожному з проміжків  $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  
і спадає на кожному з проміжків  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

8. Найбільше значення функції дорівнює 1 при  $x = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .  
Найменше значення функції дорівнює -1 при  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Таблиця 38. ГРАФІК ФУНКЦІЇ  $y = \operatorname{tg} x$  ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ**

**Графік функції  $y = \operatorname{tg} x$  (тангенсоїда)**



**Властивості функції  $y = \operatorname{tg} x$**

1. Область визначення:  $D(\operatorname{tg} x): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

2. Область значень:  $y \in \mathbf{R}$ .  $E(\operatorname{tg} x) = \mathbf{R}$

3. Функція непарна:  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$  (графік симетричний відносно початку координат).

4. Функція періодична з періодом  $T = \pi$ :  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ .

5. Точки перетину з осями координат:  $Oy$   $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$   $Ox$   $\begin{cases} y=0, \\ x = \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

6. Проміжки знакосталості:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x > 0 \text{ при } x \in \left( \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbf{Z} \\ \operatorname{tg} x < 0 \text{ при } x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k \right), k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

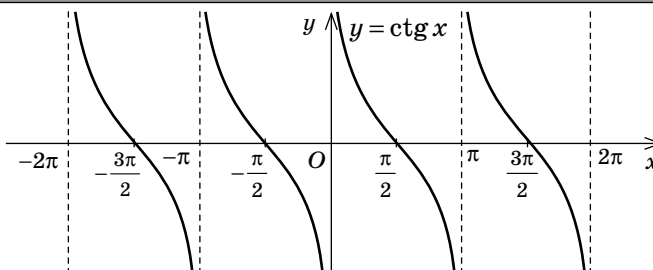
7. Проміжки зростання і спадання:

функція  $\operatorname{tg} x$  зростає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків  $\left( -\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbf{Z}$ .

8. Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Таблиця 39. ГРАФІК ФУНКЦІЇ  $y = \operatorname{ctg} x$  ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Графік функції  $y = \operatorname{ctg} x$  (котангенсоїда)



Властивості функції  $y = \operatorname{ctg} x$

1. Область визначення:  $D(\operatorname{ctg} x): x \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$

2. Область значень:  $y \in \mathbf{R}$ .  $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbf{R}$

3. Функція непарна:  $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$  (графік симетричний відносно початку координат).

4. Функція періодична з періодом  $T = \pi$ :  $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ .

5. Точки перетину з осями координат:  $Oy$  немає  $Ox$   $\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

6. Проміжки знакосталості:

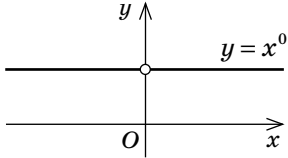
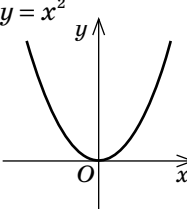
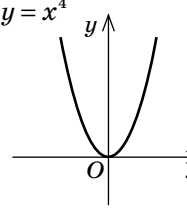
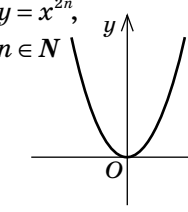
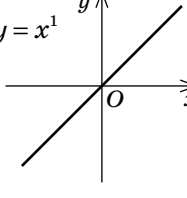
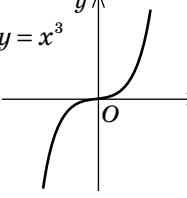
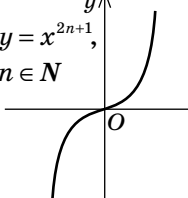
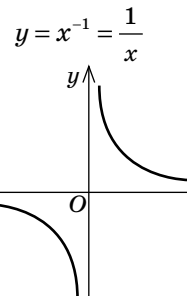
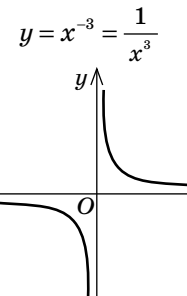
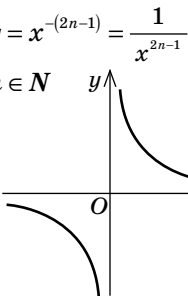
$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x > 0 \text{ при } x \in \left( \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbf{Z} \\ \operatorname{ctg} x < 0 \text{ при } x \in \left( \frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k \right), k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

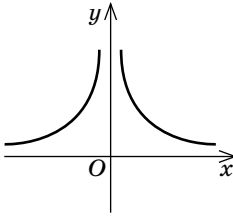
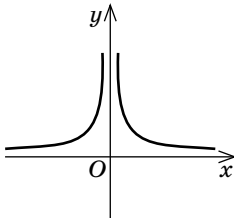
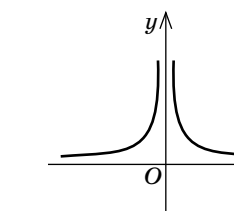
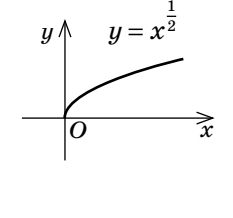
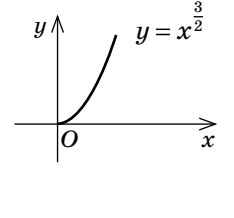
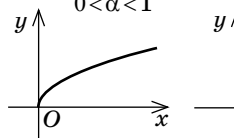
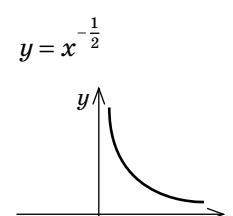
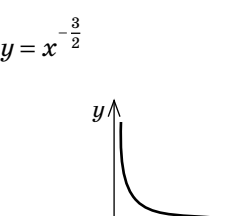
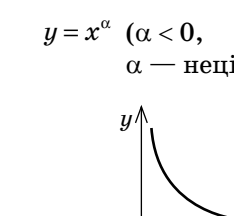
7. Проміжки зростання і спадання:

функція  $\operatorname{ctg} x$  спадає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків  $(\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbf{Z}$ .

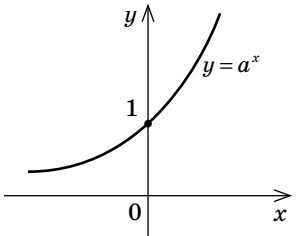
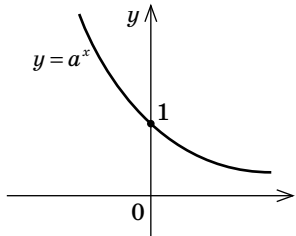
8. Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Таблиця 40. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

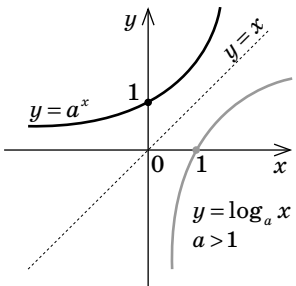
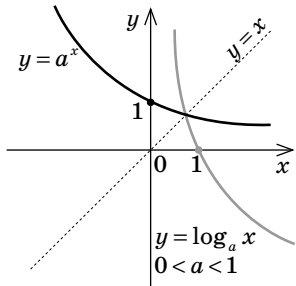
Означення	Особливий випадок ( $\alpha = 0$ )					
<p>Функція виду <math>y = x^\alpha</math>, де <math>\alpha</math> — будь-яке дійсне число, називається степеневою функцією</p>	<p>Якщо <math>\alpha = 0</math>, то <math>y = x^\alpha = x^0 = 1</math> (при <math>x \neq 0</math>)</p>					
Графіки та властивості функції $y = x^\alpha$ (при $\alpha \neq 0$ )						
ГРАФІКИ			ВЛАСТИВОСТІ			
			$D(y)$	$E(y)$	Парність і непарність	Зростання і спадання
1. $y = x^\alpha$ , $\alpha$ — парне натуральне число ( $y = x^{2n}$ , $n \in \mathbb{N}$ )						
			$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$	Парна	<p>Спадає на проміжку <math>(-\infty; 0]</math>. Зростає на проміжку <math>[0; +\infty)</math></p>
2. $y = x^\alpha$ , $\alpha$ — непарне натуральне число ( $y = x$ та $y = x^{2n+1}$ , $n \in \mathbb{N}$ )						
			$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Непарна	Зростає
3. $y = x^\alpha$ , $\alpha$ — непарне від'ємне число ( $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ , $n \in \mathbb{N}$ )						
			$x \neq 0$	$y \neq 0$	Непарна	<p>Спадає на кожному з проміжків <math>(-\infty; 0)</math> та <math>(0; +\infty)</math></p>

ГРАФІКИ			ВЛАСТИВОСТІ			
			$D(y)$	$E(y)$	Парність і непарність	Зростання і спадання
<b>4. <math>y = x^\alpha</math>, <math>\alpha</math> — парне від'ємне число (<math>y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}</math>, <math>n \in \mathbb{N}</math>)</b>						
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ , $n \in \mathbb{N}$ 	$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	Парна	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ . Спадає на проміжку $(0; +\infty)$
<b>5. <math>y = x^\alpha</math>, <math>\alpha</math> — неціле додатне число</b>						
$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha$ ( $\alpha > 0$ , $\alpha$ — неціле) $0 < \alpha < 1$ 	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Ні парна, ні непарна	Зростає
<b>6. <math>y = x^\alpha</math>, <math>\alpha</math> — неціле від'ємне число</b>						
$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha$ ( $\alpha < 0$ , $\alpha$ — неціле) 	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Ні парна, ні непарна	Спадає

Таблиця 41. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

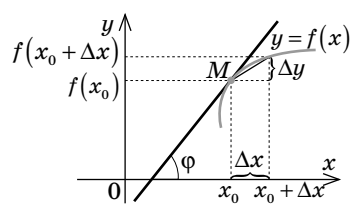
Поняття показникової функції та її графік (експонента)	
Означення. Показниковою функцією називається функція виду $y = a^x$ , де $a > 0$ і $a \neq 1$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	
Властивості показникової функції	
1. Область визначення: $x \in \mathbf{R}$ .	$D(a^x) = \mathbf{R}$
2. Область значень: $y > 0$ .	$E(a^x) = (0; +\infty)$
3. Функція ні парна, ні непарна	
4. Точки перетину з осями координат: $Oy$ $\begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases}$ $Ox$ немає	
5. Проміжки зростання і спадання:	
$a > 1$	$0 < a < 1$
функція $y = a^x$ при $a > 1$ зростає на всій області визначення	функція $y = a^x$ при $0 < a < 1$ спадає на всій області визначення
6. Проміжки знакосталості: $y > 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbf{R}$	
7. Найбільшого і найменшого значень функція не має	

Таблиця 42. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Поняття логарифмічної функції та її графік	
Означення. Логарифмічною функцією називається функція виду $y = \log_a x$ , де $a > 0$ , $a \neq 1$	
Функції $y = a^x$ та $y = \log_a x$ ( $a > 0$ , $a \neq 1$ ) — взаємно обернені функції, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$	
	

Властивості логарифмічної функції	
1. Область визначення: $x > 0$ .	$D(\log_a x) = (0; +\infty)$
2. Область значень: $y \in \mathbf{R}$ .	$E(\log_a x) = \mathbf{R}$
3. Функція ні парна, ні непарна	
4. Точки перетину з осями координат: $Oy$ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">немає</span> $Ox$ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>\begin{cases} y = 0, \\ x = 1 \end{cases}</math></span>	
5. Проміжки зростання і спадання:	
$a > 1$	$0 < a < 1$
функція $\log_a x$ зростає при $a > 1$ на всій області визначення	функція $\log_a x$ спадає при $0 < a < 1$ на всій області визначення
6. Проміжки знакосталості:	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$ , $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$ , $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$
7. <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Найбільшого і найменшого значень функція не має</span>	

Таблиця 43. ПОХІДНА

1. Означення похідної	
$y = f(x), y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math display="block">y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}</math> </div>	<p><b>Похідною функції <math>y = f(x)</math> у точці <math>x_0</math> називається границя відношення приросту функції в точці <math>x_0</math> до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.</b></p> <p>Операція знаходження похідної називається <b>диференціюванням</b></p>
2. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$	
	<p><math>f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi</math></p> <p><math>k</math> — <b>кутовий коефіцієнт дотичної</b> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)</math></span></p> <p><math>y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)</math> — <b>рівняння дотичної</b> до графіка функції <math>y = f(x)</math> у точці з абсцисою <math>x_0</math></p>
<p>Значення похідної в точці <math>x_0</math> дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою <math>x_0</math> і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної. (Кут відлічується від додатного напрямку осі <math>Ox</math> проти годинникової стрілки)</p>	
3. Механічний зміст похідної	
<p><b>Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу</b></p>	
<p><math>s = s(t)</math> — <i>залежність</i> пройденого шляху від часу</p> <p><math>v = s'(t)</math> — <i>швидкість</i> прямолінійного руху</p> <p><math>a = v'(t)</math> — <i>прискорення</i> прямолінійного руху</p>	<p>Зокрема, <i>похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції</i>, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин.</p> <p>Наприклад, миттєва швидкість <math>v</math> нерівномірного прямолінійного руху є похідною функції, яка виражає залежність пройденого шляху <math>s</math> від часу <math>t</math></p>

**4. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції**

Якщо функція  $f(x)$  диференційовна в точці  $x_0$ , то вона неперервна в цій точці

Якщо функція  $f(x)$  диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку

**5. Правила диференціювання**

ПРАВИЛО	ПРИКЛАД
$(cu)' = cu'$ Сталий множник можна виносити за знак похідної	$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$
$(u+v)' = u' + v'$ Похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних	$(x + \sqrt{x})' = (x)' + (\sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)' = u'v + v'u$	$((x+2)x^2)' = (x+2)'x^2 + (x^2)'(x+2) = (x'+2')x^2 + 2x(x+2) = (1+0)x^2 + 2x(x+2) = 3x^2 + 4x$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - x' \cdot 1}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

**6. Похідна складеної функції (функції від функції)**

Якщо  $y = f(u)$  і  $u = u(x)$ , тобто  $y = f(u(x))$ , то

$$(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

Більш коротко це можна записати так\*:

$$\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x}$$

$$\begin{aligned} ((3x-1)^5)' &= 5(3x-1)^4(3x-1)' = \\ &= 5(3x-1)^4((3x)' - 1') = 5(3x-1)^4(3-0) = \\ &= 15(3x-1)^4. \end{aligned}$$

(Якщо  $u = 3x - 1$ , тоді  $(u^5)'_x = 5u^4 u'_x$ )

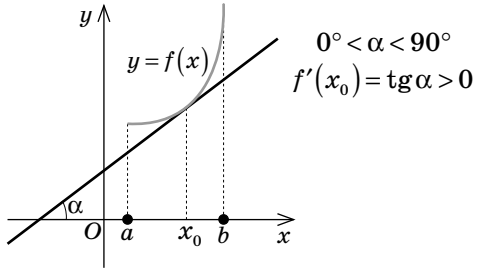
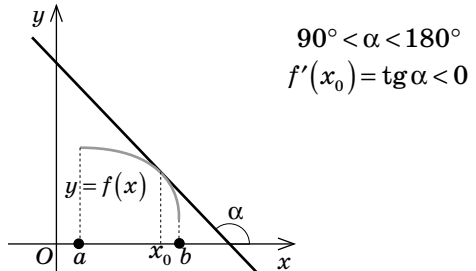
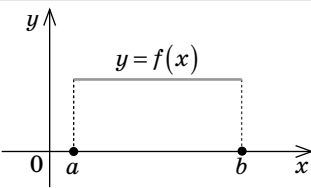
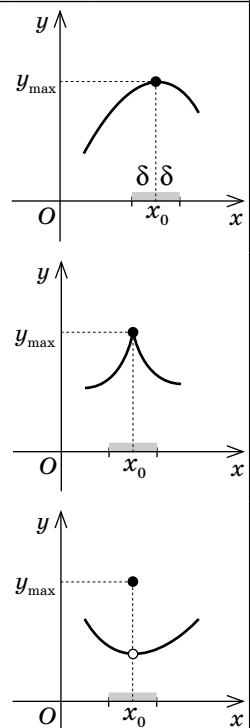
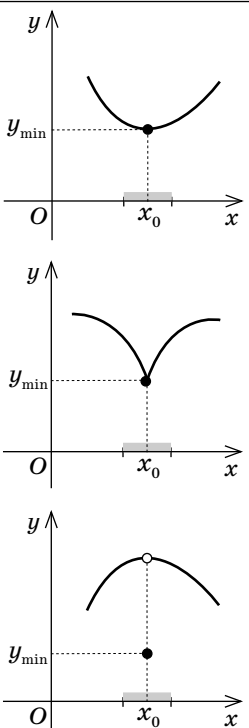
**7. Похідні елементарних функцій**

$c' = 0$ ( $c$ — стала)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ( $x \neq 0$ )	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ( $x > 0$ )
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ( $a > 0$ , $a$ — стала)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ( $x > 0$ )	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ( $x > 0$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ , $a$ — стала)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правої частини формули)

\* У позначеннях  $y'_x, f'_u, u'_x$  нижній індекс указує, за яким аргументом береться похідна.



Таблиця 44. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПРОМІЖКІВ ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ ТА ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ

1. Монотонність і сталість функції	
ДОСТАТНЯ УМОВА ЗРОСТАННЯ ФУНКЦІЇ	ДОСТАТНЯ УМОВА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ
 <p><math>0^\circ &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> <math>f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha &gt; 0</math></p>	 <p><math>90^\circ &lt; \alpha &lt; 180^\circ</math> <math>f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha &lt; 0</math></p>
<p>Якщо в кожній точці інтервалу <math>(a; b)</math> <math>f'(x) &gt; 0</math>, то функція <math>f(x)</math> зростає на цьому інтервалі</p>	<p>Якщо в кожній точці інтервалу <math>(a; b)</math> <math>f'(x) &lt; 0</math>, то функція <math>f(x)</math> спадає на цьому інтервалі</p>
НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВА СТАЛОСТІ ФУНКЦІЇ	
	<p>Функція <math>f(x)</math> є сталою на інтервалі <math>(a; b)</math> тоді і тільки тоді, коли <math>f'(x) = 0</math> в усіх точках цього інтервалу</p>
2. Екстремуми (максимуми та мінімуми) функції	
ТОЧКИ МАКСИМУМУ	ТОЧКИ МІНІМУМУ
<p>Точка <math>x_0</math> з області визначення функції <math>f(x)</math> називається <i>точкою максимуму</i> цієї функції, якщо знайдеться <math>\delta</math>-окіл <math>(x_0 - \delta; x_0 + \delta)</math> точки <math>x_0</math>, такий, що для всіх <math>x \neq x_0</math> з цього околу виконується нерівність</p> $f(x) < f(x_0)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math>x_{\max} = x_0</math> — точка максимуму         </div> 	<p>Точка <math>x_0</math> з області визначення функції <math>f(x)</math> називається <i>точкою мінімуму</i> цієї функції, якщо знайдеться <math>\delta</math>-окіл <math>(x_0 - \delta; x_0 + \delta)</math> точки <math>x_0</math>, такий, що для всіх <math>x \neq x_0</math> з цього околу виконується нерівність</p> $f(x) > f(x_0)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math>x_{\min} = x_0</math> — точка мінімуму         </div> 

Точки максимуму та мінімуму називаються *точками екстремуму*

Значення функції в точках максимуму і мінімуму називаються *екстремумами (максимумом і мінімумом) функції*

$$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0) \text{ — максимум}$$

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0) \text{ — мінімум}$$

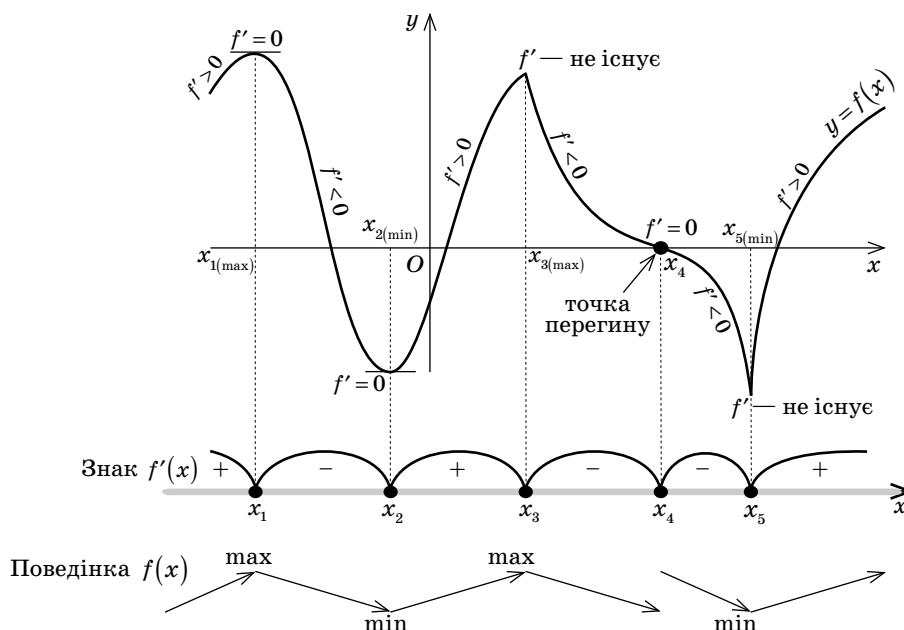
### 3. Критичні точки

ОЗНАЧЕННЯ	ПРИКЛАД
<p><b>Критичними точками функції</b> називаються внутрішні точки її області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує</p>	<p><math>f(x) = x^3 - 12x</math> (<math>D(f) = \mathbf{R}</math>).  <math>f'(x) = 3x^2 - 12</math> — існує на всій області визначення.  <math>f'(x) = 0</math> при <math>3x^2 - 12 = 0</math>, <math>x^2 = 4</math>, <math>x = \pm 2</math> — критичні точки</p>

### 4. Необхідна та достатня умови екстремуму

НЕОБХІДНА УМОВА ЕКСТРЕМУМУ	ДОСТАТНЯ УМОВА ЕКСТРЕМУМУ
<p>У точках екстремуму похідна функції <math>f(x)</math> дорівнює нулю або не існує</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math>x_0</math> — точка екстремуму функції <math>f(x)</math> </div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math>f'(x_0) = 0</math> або <math>f'(x_0)</math> — не існує                 </div> <p>(але не в кожній точці <math>x_0</math>, де <math>f'(x_0) = 0</math> або <math>f'(x_0)</math> не існує, буде екстремум)</p>	<p>Якщо функція <math>f(x)</math> неперервна в точці <math>x_0</math> і похідна <math>f'(x)</math> змінює знак при переході через точку <math>x_0</math>, то <math>x_0</math> — точка екстремуму функції <math>f(x)</math></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                 У точці <math>x_0</math> знак <math>f'(x)</math> змінюється з «+» на «-»             </div> <div style="font-size: 2em;">⇒</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>x_0</math> — точка максимуму             </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                 У точці <math>x_0</math> знак <math>f'(x)</math> змінюється з «-» на «+»             </div> <div style="font-size: 2em;">⇒</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>x_0</math> — точка мінімуму             </div> </div>

### 5. Приклад графіка функції $y = f(x)$ , що має екстремуми ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ — критичні точки)

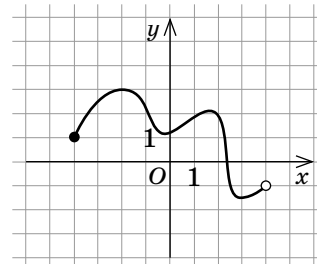


## Тестові завдання до розділу 3 «Функції»

Завдання 1–36 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть область визначення цієї функції.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 5; 3]$	$(-1; 5; 3]$	$(-1; 1]$	$[-4; 4)$	$[-4; 4]$



*Розв'язання.* Щоб знайти область визначення функції, заданої графічно, досить спроектувати її графік на вісь  $Ox$  (і врахувати, що крайня справа точка не належить графіку). Одержуємо, що  $x \in [-4; 4)$ . Отже, правильна відповідь Г.

2. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x - x^2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$[0; 1)$	$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$	$[0; 1]$	$(0; 1)$

3. Знайдіть область визначення функції  $y = \frac{\sqrt{x+3}}{\lg(x-2)}$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-3; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(2; 3) \cup (3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$(-3; 3) \cup (3; +\infty)$

*Розв'язання.* Враховуємо обмеження для функції, заданої формулою (див. табл. 32):

- 1) знаменник дроби не дорівнює нулю;
- 2) під знаком кореня парного степеня має стояти невід'ємний вираз;
- 3) під знаком логарифма має стояти додатний вираз.

Одержуємо систему обмежень  $\begin{cases} \lg(x-2) \neq 0, \\ x+3 \geq 0, \\ x-2 > 0. \end{cases}$  Щоб розв'язати об-

меження  $\lg(x-2) \neq 0$ , з'ясуємо, коли  $\lg(x-2) = 0$ . Тоді за означенням логарифма  $x-2 = 10^0$ , тобто  $x-2 = 1$ , отже,  $x = 3$ . Таким чином, розв'язком першого обмеження буде  $x \neq 3$ . Одержуємо систему об-

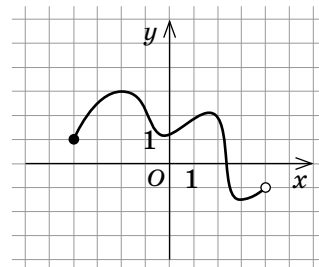
межень  $\begin{cases} x \neq 3, \\ x \geq -3, \\ x > 2, \end{cases}$  розв'язок якої:  $(2; 3) \cup (3; +\infty)$ . Отже, правильна відповідь В.

4. Знайдіть область визначення функції  $y = \frac{\log_5(x+3)}{\sqrt{2-x}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-3; +\infty)$	$(-3; 2)$	$(-3; 2]$	$(2; 3)$	$(-2; 3)$

5. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть область значень цієї функції.

А	Б	В	Г	Д
$[-1,5; 3]$	$(-1,5; 3]$	$(-1; 3]$	$[-4; 4)$	$[-4; 4]$



*Розв'язання.* Щоб знайти область (чи множину) значень функції, заданої графічно, досить спроектувати її графік на вісь  $Oy$  («виколота» точка не впливає на множину значень функції, оскільки значення  $y = -1$  функція приймає при  $x = 2,5$ ). Одержуємо, що  $y \in [-1,5; 3]$ . Отже, правильна відповідь **А**.

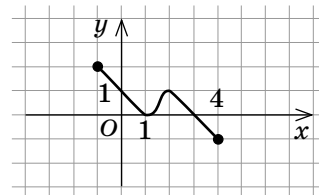
6. Знайдіть область значень функції  $y = 3^{2\cos^2 x - \sin^2 x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$[1; 9]$	$[3; 9]$	$[1; 3]$	$\left[\frac{1}{3}; 1\right]$	$\left[\frac{1}{3}; 9\right]$

*Розв'язання.* Виразимо показник степеня через одну функцію. Оскільки  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , то  $2\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 3\cos^2 x - 1$ . Оцінимо, які значення може приймати показник степеня. Оскільки  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , то  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$  і  $0 \leq 3\cos^2 x \leq 3$ . Тоді  $-1 \leq 3\cos^2 x - 1 \leq 2$ . Оскільки функція  $y = 3^t$  є неперервною і зростаючою (основа степеня  $3 > 1$ ), то в тому випадку, коли показник приймає всі значення від  $-1$  до  $2$ , задана функція буде приймати всі значення від  $3^{-1} = \frac{1}{3}$  до  $3^2 = 9$ . Отже, правильна відповідь **Д**.

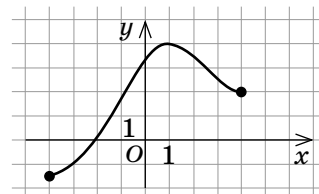
7. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть область визначення цієї функції.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 2]$	$(-1; 2]$	$[1; 3]$	$[-1; 4]$	$[-1; 4)$



8. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть область значень цієї функції.

А	Б	В	Г	Д
$[-1,5; 4]$	$(-1,5; 4]$	$(-1,5; 0]$	$[-4; 4)$	$[-4; 4]$

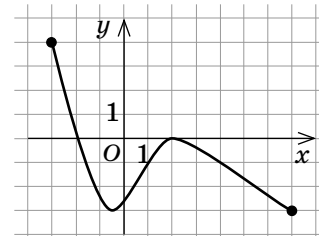


9. Знайдіть область значень функції  $y = \sqrt{x^2 + 9}$ .

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$[0; 3]$	$(0; +\infty)$

10. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть проміжок, на якому вона зростає.

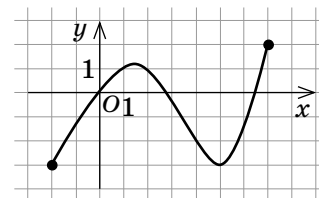
А	Б	В	Г	Д
$[-3; -0,5]$	$[-0,5; 2]$	$[-3; 7]$	$[-3; 0]$	$[-3; 4]$



*Розв'язання.* Зростання функції на графіку означає, що при збільшенні аргументу відповідні точки графіка піднімаються. Як бачимо, це відбувається тільки при значеннях аргументу від  $-0,5$  до  $2$ . Отже, правильна відповідь **Б**.

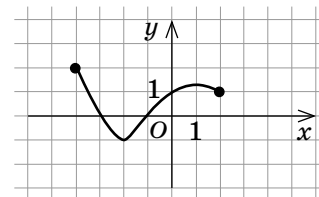
11. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть проміжок, на якому вона спадає.

А	Б	В	Г	Д
$[-2; 1,5]$	$[5; 7]$	$[1,5; 5]$	$[0; 3]$	$[-2; 7]$



12. Функція задана графіком (див. рисунок). Укажіть проміжок, на якому вона зростає.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 2]$	$[-4; -2]$	$[-2; 1]$	$[1; 2]$	$[-1; 2]$

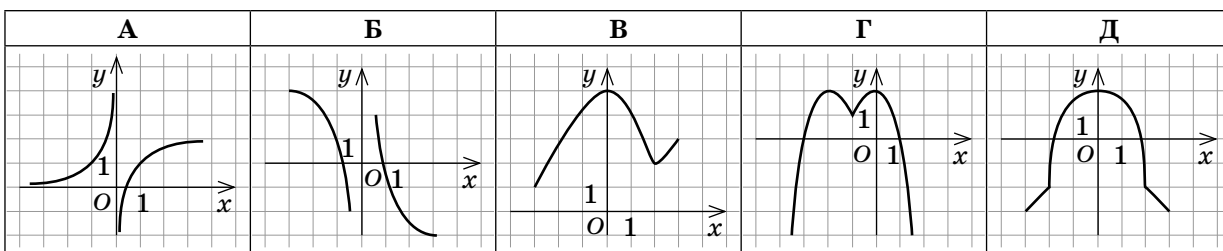


13. Укажіть рисунок, на якому зображено графік непарної функції.

А	Б	В	Г	Д

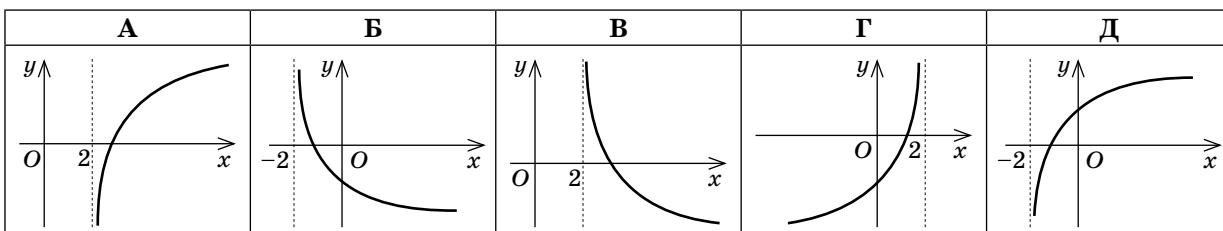
*Розв'язання.* Як відомо, графік непарної функції симетричний відносно початку координат. З наведених графіків тільки графік на рисунку **Б** є симетричним відносно початку координат, тобто це і є графік непарної функції. Отже, правильна відповідь **Б**.

14. На одному з рисунків зображено графік парної функції. Укажіть цей рисунок.



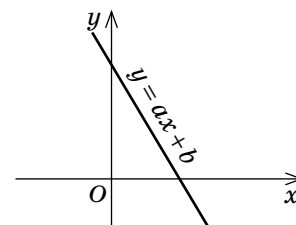
*Вказівка.* Слід урахувати, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

15. На одному з рисунків наведено графік функції  $y = -\log_3(x+2)$ . Укажіть цей рисунок.



16. За видом графіка функції  $y = ax + b$  визначте знаки коефіцієнтів  $a$  і  $b$ . Оберіть правильне твердження.

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a = 0, \\ b > 0 \end{cases}$



17. Знайдіть найбільше значення функції  $y = 5\cos 3x - 7$ .

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
-2	2	5	-5	-6

*Розв'язання.* Областю значень функції  $\cos 3x$  є проміжок  $[-1; 1]$ . Тоді для функції  $5\cos 3x$  областю значень буде проміжок  $[-5; 5]$ , а для функції  $5\cos 3x - 7$  — проміжок  $[-12; -2]$ . Отже, найбільшим значенням заданої функції є число  $-2$ . Таким чином, правильна відповідь **А**.

18. Обчисліть  $f'(2)$ , якщо  $f(x) = \sqrt{9-4x}$ .

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	1	2	-2

Розв'язання. Оскільки  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , то

$$f'(x) = (\sqrt{9-4x})' = \frac{1}{2\sqrt{9-4x}} \cdot (9-4x)' = \frac{-4}{2\sqrt{9-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{9-4x}}.$$

Підставляємо в одержану формулу  $x = 2$ . Одержуємо:

$$f'(2) = \frac{-2}{\sqrt{9-4 \cdot 2}} = -2.$$

Отже, правильна відповідь Д.

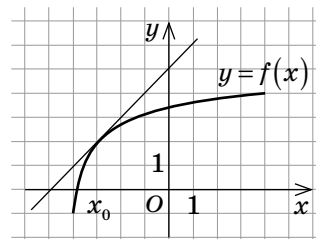
19. До графіка функції  $y = -5x^2$  проведено дотичну в точці з абсцисою  $x_0 = 3$ . Обчисліть тангенс кута нахилу цієї дотичної до додатного напрямку осі абсцис.

А	Б	В	Г	Д
-45	-30	-15	15	30

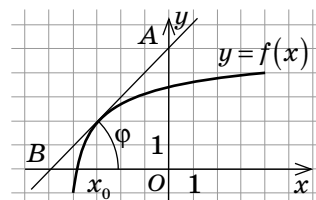
Розв'язання. За геометричним змістом похідної маємо:  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ , де  $\varphi$  — кут, який утворює дотична до графіка функції  $y = f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$  з додатним напрямком осі  $Ox$ . Оскільки  $y' = -10x$ , то  $\operatorname{tg} \varphi = y'(3) = -30$ . Отже, правильна відповідь Б.

20. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$  і дотична до нього в точці з абсцисою  $x_0$ . Знайдіть значення похідної в точці  $x_0$ .

А	Б	В	Г	Д
1	-1	5	-5	0,5



Розв'язання. За геометричним змістом похідної маємо:  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ , де  $\varphi$  — кут, який утворює дотична до графіка функції  $y = f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$  з додатним напрямком осі  $Ox$ . Із прямокутного трикутника  $AOB$ :  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AO}{OB} = \frac{5}{5} = 1$ . Отже, правильна відповідь А.



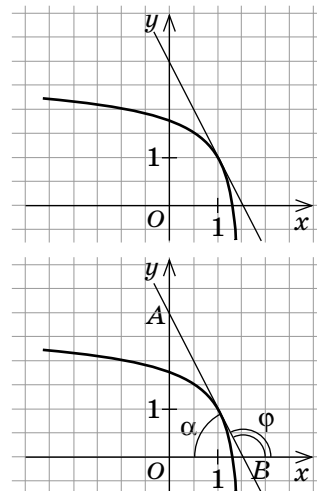
21. На рисунку зображено графік функції  $y=f(x)$  і дотична до нього в точці з абсцисою  $x_0$ . Знайдіть значення похідної в точці  $x_0$ .

А	Б	В	Г	Д
1	-1	2	-2	0,5

*Розв'язання.* За геометричним змістом похідної маємо:  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ , де  $\varphi$  — кут, який утворює дотична до графіка функції  $y=f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$  з додатним напрямком осі  $Ox$ . З прямокутного трикутника  $AOB$  можна легко знайти тангенс кута  $\alpha$ , суміжного з кутом  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{OB} = \frac{3}{1,5} = 2. \text{ Враховуючи, що за властивістю суміжних кутів}$$

$\varphi = 180^\circ - \alpha$ , одержуємо  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -2$ . Отже, правильна відповідь Г.



22. Знайдіть похідну функції  $f(x) = 2x^3 + e^{3x-3}$  у точці  $x_0 = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
3	6	9	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$

23. Обчисліть  $f'(4)$ , якщо  $f(x) = \frac{x}{3-x}$ .

А	Б	В	Г	Д
-4	4	-3	3	Інша відповідь

24. Знайдіть похідну функції  $y = 5x^3 + \cos x$ .

А	Б	В	Г	Д
$5x^2 - \sin x$	$3x^2 + \sin x$	$3x^2 - \sin x$	$15x^2 + \sin x$	$15x^2 - \sin x$

25. Обчисліть  $f'(1)$ , якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції  $y=f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0 = 1$ , і додатним напрямком осі  $Ox$  дорівнює  $60^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1

26. Знайдіть стаціонарні точки функції  $y = x^3 - 6x^2 + 3$  (тобто точки, у яких похідна дорівнює нулю).

А	Б	В	Г	Д
0; 2	0; 4	1; 2	1; 4	2; 4



27. Знайдіть проміжки зростання функції  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

*Розв'язання.* Область визначення  $x \in \mathbf{R}$ .  $y' = -3x^2 + 3$  — існує при всіх значеннях  $x$  з області визначення. Критичні точки:  $y' = 0$ ,  $-3x^2 + 3 = 0$ ,  $x^2 = 1$ ,  $x = \pm 1$ . Позначаємо критичні точки на області визначення і визначаємо знак похідної в кожному з одержаних проміжків (і враховуємо, що в тих проміжках, де похідна додатна, функція зростає).

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
Знак $y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
Поведінка* $y$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

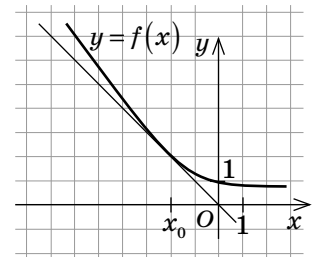
Як бачимо, функція зростає тільки в проміжку  $(-1; 1)$ . Отже, правильна відповідь **В**.

*Зауваження 1.* Для отримання відповіді можна було після знаходження похідної розв'язати нерівність  $y' > 0$ .

*Зауваження 2.* Враховуючи неперервність функції  $y = -x^3 + 3x + 1$ , до проміжків зростання і спадання можна включати і крайні точки, тобто правильною відповіддю є також проміжок  $[-1; 1]$ .

28. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$  і дотичну до нього в точці з абсцисою  $x_0$ . Знайдіть значення  $f'(x_0)$ .

А	Б	В	Г	Д
1	-1	0	2	-2



29. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції  $y = x^4$  у точці  $A(2; 16)$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = -32x + 80$	$y = 32x - 48$	$y = -32x + 48$	$y = 32x + 48$	$y = 8x$

*Розв'язання.* Дотична до графіка функції  $y = f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$  має рівняння  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . У нашому прикладі:  $x_0 = 2$ ,  $f(x_0) = y(2) = 16$ . Оскільки  $y' = 4x^3$ , то  $f'(x_0) = y'(2) = 32$  і рівняння дотичної буде мати вигляд  $y = 16 + 32(x - 2)$ , тобто  $y = -32x + 48$ . Отже, правильна відповідь **В**.

\* Символом  $\nearrow$  позначено зростання функції на проміжку, а символом  $\searrow$  — спадання.

30. Знайдіть ординату точки на параболі  $y = x^2 + 2x - 3$ , у якій кутковий коефіцієнт дотичної до параболі дорівнює 6.

А	Б	В	Г	Д
-15	5	-1	16	15

31. Обчисліть:  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ .

А	Б	В	Г	Д
3	$\ln 2$	$\ln 3$	-3	1

32. Обчисліть:  $\int_2^3 5x^4 dx$ .

А	Б	В	Г	Д
129	171	201	211	227

33. Укажіть первісну функції  $y = 2x - 4$ , графік якої проходить через точку  $A(0;1)$ .

А	Б	В	Г	Д
2	$x^2 - 4x + 1$	$x^{2-4x+1}$	$2x^2 - 4x + 1$	$x^2 - 4x$

34. Укажіть первісну функції  $f(x) = 2x + 2$ , графік якої проходить через точку з координатами  $(1;4)$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = x^2 + 2x$	$F(x) = x^2 + 2x + 1$	$F(x) = x^2 + 2x + 2$	$F(x) = x^2 + 2x - 4$	$F(x) = x^2 + 2x - 23$

35. Укажіть формулу для обчислення площі фігури, обмеженої графіком функції  $y = x(x-2)$  і віссю  $Ox$ .

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^2 x(2-x) dx$	$\int_0^1 x(2-x) dx$	$\int_0^2 x(x-2) dx$	$\int_0^1 x(x-2) dx$	$\int_1^2 x(x-2) dx$

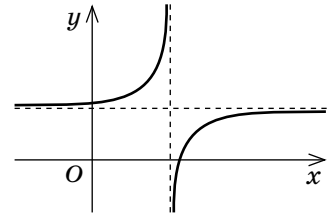
36. Укажіть формулу для обчислення площі фігури, обмеженої графіками функцій  $y = x^2$  та  $y = -x^2 + 4x$ .

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_0^2 4x dx$	$S = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$	$S = \int_0^2 (2x^2 + 4x) dx$	$S = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx$	Інша відповідь

Розв'яжіть завдання 37–52. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу.

37. За ескізом графіка функції  $y = \frac{ax-b}{x+c}$  визначте знаки параметрів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . У відповіді зазначте номер правильного варіанта з наведених нижче.

1.  $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$     2.  $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$     3.  $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$     4.  $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$     5.  $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$     6.  $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$

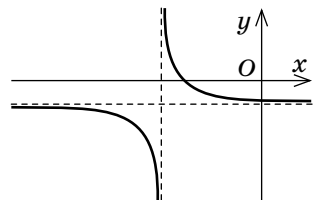


*Розв'язання.* Область визначення заданої функції  $x \neq -c$ . Отже, при  $x = -c$  графік функції розривається. Як бачимо, ця точка розташована справа від нуля, тоді  $-c > 0$ , тобто  $c < 0$ . Знайдемо точки перетину графіка функції  $y = \frac{ax-b}{x+c}$  з осями координат. На осі  $Oy$  значення  $x = 0$ , тоді  $y = -\frac{b}{c}$ . Як бачимо, на графіку ця точка розташована вище нуля, тоді  $-\frac{b}{c} > 0$ . Враховуючи, що  $c < 0$ , одержуємо  $b > 0$ . На осі  $Ox$  значення  $y = 0$ , тоді  $ax - b = 0$  і  $x = \frac{b}{a}$  (з умови випливає, що  $a \neq 0$ ). Як бачимо, на графіку ця точка розташована справа від нуля, тоді  $\frac{b}{a} > 0$ . Враховуючи, що  $b > 0$ , одержуємо  $a > 0$ . Отже, знаки параметрів  $a$ ,  $b$ ,  $c$  правильно записані під номером 6.

*Відповідь:* 6.

38. За ескізом графіка функції  $y = \frac{ax-3}{bx+c}$  визначте знаки параметрів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . У відповіді вкажіть номер правильного варіанта з наведених нижче.

1.  $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$     2.  $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$     3.  $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$     4.  $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$     5.  $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$     6.  $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$

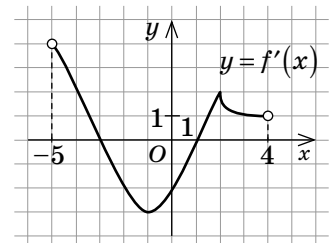


*Відповідь:* \_\_\_\_\_

39. Функція  $y = f(x)$  означена на проміжку  $(-5; 4)$ . На рисунку зображено графік її похідної. Укажіть точку максимуму функції на проміжку  $(-5; 4)$ .

*Розв'язання.* Як бачимо, похідна існує на всій області визначення функції  $f(x)$  і дорівнює нулю в точках  $-3$  і  $1$  — це критичні точки. У точці  $-3$  похідна змінює знак з «+» на «-», а в точці  $1$  — з «-» на «+». Якщо критична точка є точкою максимуму, то похідна в цій точці змінює знак з «+» на «-». Отже, точка максимуму — це точка  $-3$ .

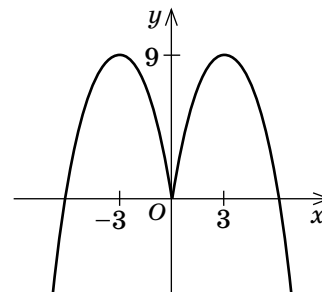
*Відповідь:*  $-3$ .



40. Знайдіть найбільше значення функції  $f(x) = 6|x| - x^2$ .

*Розв'язання.* Функція парна:  $f(-x) = f(x)$ , отже, її графік симетричний відносно осі  $Oy$ . Тому, щоб знайти її найбільше значення, достатньо дослідити функцію при  $x \geq 0$ . Одержуємо  $f(x) = 6x - x^2$  — квадратичну функцію, задану на проміжку  $[0; +\infty)$ . Оскільки абсциса вершини параболу додатна ( $x_0 = 3$ ) і вітки параболу напрямлені вниз, то найбільше значення при  $x \geq 0$  функція  $f(x)$  буде приймати у вершині:  $f(3) = 9$ .

Для отримання відповіді можна було також побудувати графік функції  $f(x)$  (див. рисунок).



*Відповідь:* 9

41. Знайдіть найменше значення функції  $f(x) = |x-2| + 2|x+1|$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

42. Знайдіть, при яких значеннях параметра  $a$  дотична до графіка функції  $y = x^3 + ax^2$  у точці з абсцисою  $x_0 = -1$  проходить через точку  $N(3; 4)$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

43. Знайдіть найбільше значення функції  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  на відрізку  $[-1; 3]$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

44. Знайдіть найбільше значення функції  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  на проміжку  $[-1; 1]$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

45. Знайдіть найбільше значення функції  $y = \frac{2x^2 + 6}{x+1}$  на проміжку  $[-5; -2]$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

46. Обчисліть значення похідної функції  $f(x) = 4x \ln x + 5$  при  $x = e$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

47. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій  $y = 2x^2$ ,  $y = 6x - x^2$ .

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

48. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій  $y = x^2 - 2x + 2$  та  $y = 2 + 4x - x^2$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

49. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом  $v = 2t + 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Знайдіть шлях (у метрах), який проходить тіло за інтервал часу від  $t_1 = 1$  с до  $t_2 = 4$  с.

Відповідь: \_\_\_\_\_

50. Знайдіть найбільше значення функції  $y = \frac{\log_{0,5}(x-1) + |\log_{0,5}(x-1)|}{2}$ .

Розв'язання.

Щоб знайти найбільше значення функції, побудуємо її графік.

1. Область визначення:  $x - 1 > 0$ , тобто  $x > 1$ .

2. Якщо  $\log_{0,5}(x-1) \geq 0$ , то  $\log_{0,5}(x-1) \geq \log_{0,5} 1$ . Функція  $y = \log_{0,5} t$  — спадна, отже,  $x - 1 \leq 1$ , тобто  $x \leq 2$ , і, враховуючи область визначення, одержуємо  $1 < x \leq 2$ . Тоді  $y = \frac{\log_{0,5}(x-1) + \log_{0,5}(x-1)}{2} = \log_{0,5}(x-1)$ .

3. Якщо  $\log_{0,5}(x-1) \leq 0$ , то  $\log_{0,5}(x-1) \leq \log_{0,5} 1$ .

Функція  $y = \log_{0,5} t$  — спадна, отже,  $x - 1 \geq 1$ , тобто  $x \geq 2$ .

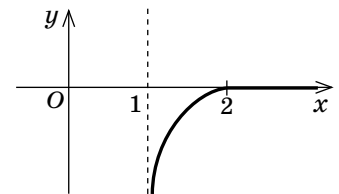
Тоді  $y = \frac{\log_{0,5}(x-1) - \log_{0,5}(x-1)}{2} = 0$ .

Тобто  $y = \begin{cases} \log_{0,5}(x-1) & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$

4. Будуємо графік одержаної функції.

Як бачимо, найбільше значення заданої функції дорівнює нулю.

Відповідь: 0.



51. Знайдіть найменше значення функції  $y = \frac{\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 2|}{2}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

52. Знайдіть найменше значення функції  $y = \frac{\sqrt{-x} + |4 - \sqrt{-x}|}{2}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

## Розділ 4

# ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ

## Основні поняття, формули, властивості до розділу 4 «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики»

Таблиця 45. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторика	
<p><b>Комбінаторика</b> — розділ математики, у якому вивчаються <i>способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов</i>. Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають <i>сполуками</i>.</p> <p>Якщо всі елементи заданої впорядкованої множини різні, то дістаємо <i>перестановки без повторень</i>, а якщо в заданій упорядкованій множині елементи <i>повторюються</i>, то дістаємо <i>перестановки з повтореннями</i>.</p>	
Перестановки (без повторень)	
<p><b>Перестановкою з <math>n</math> елементів</b> називається <i>будь-яка впорядкована множина з <math>n</math> елементів</i>. Інакше кажучи, це така <i>множина, для якої указано, який елемент розташований на першому місці, який — на другому, ..., який — на <math>n</math>-му</i></p>	
Формула числа перестановок $(P_n)$	Приклад
$P_n = n!$ , де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ( $n!$ читається «ен факторіал»)	<p>Кількість різних шестизначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює:</p> $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
Розміщення (без повторень)	
<p><b>Розміщенням з <math>n</math> елементів по <math>k</math></b> називається <i>будь-яка впорядкована множина з <math>k</math> елементів, складена з елементів <math>n</math>-елементної множини</i></p>	
Формула числа розміщень $(A_n^k)$	Приклад
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	<p>Кількість різних тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не можуть повторюватися, дорівнює:</p> $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$



Комбінації (без повторень)					
<i>Комбінацією без повторень з n елементів по k називається будь-яка k-елементна підмножина n-елементної множини</i>					
<b>Формула числа комбінацій</b> ( $C_n^k$ )	<b>Приклад</b>				
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$ )	Із класу, що складається з 25 учнів, можна виділити 5 учнів для чергування по школі $C_{25}^5$ способами, тобто $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$ способами				
<b>Деякі властивості числа комбінацій без повторень</b>					
$C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$ )			$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$		
<b>Схема розв'язування комбінаторних задач</b>					
<b>ВИБІР ПРАВИЛА</b>					
<b>Правило суми</b>			<b>Правило добутку</b>		
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то A або B можна вибрати (m + n) способами			Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати (m · n) способами		
<b>ВИБІР ФОРМУЛИ</b>					
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Чи враховується порядок слідування елементів у сполучі?</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <span>Так</span> <span>Ні</span> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Чи всі елементи входять до сполучі?</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <span>Так</span> <span>Ні</span> </div>					
Формула перестановки		Формула розміщення		Формула комбінації	
без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями
$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!},$ де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

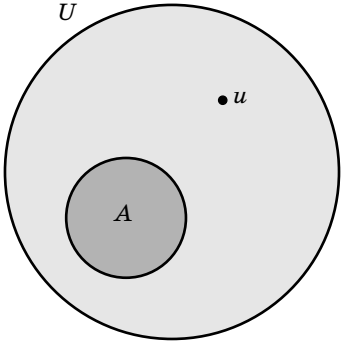
Таблиця 46. ПОНЯТТЯ ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

ПОНЯТТЯ	ПРИКЛАДИ			
<b>Випадкові експерименти та випадкові події</b>				
Подія, яка може відбутися, а може і не відбутися в процесі спостереження або експерименту в одних і тих самих умовах, називається <b>випадковою подією</b> (а сам експеримент називається <b>випадковим експериментом</b> )	Випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети, виграш у лотерею, випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика тощо			
<b>Частота та відносна частота випадкової події</b>				
Якщо при незмінних умовах проведено $n$ випадкових експериментів і в $n(A)$ випадків відбулася подія $A$ , то число $n(A)$ називається <b>частотою події <math>A</math></b>	Подія $A$ — випадання «герба» при підкиданні монети			
	Хто підкидав	Бюффон	Пірсон	Феллер
<b>Відносною частотою випадкової події</b> називають відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів, тобто відношення $\frac{n(A)}{n}$	Кількість експериментів $n$	4040	24 000	10 000
	Частота $n(A)$	2048	12 012	4979
	Відносна частота	0,5069	0,5005	0,4979
<b>Статистичне поняття ймовірності</b>				
Якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія $A$ , значення відносної частоти близькі до деякого певного числа, то це число називається <b>ймовірністю випадкової події <math>A</math></b> і позначається $P(A)$ : $0 \leq P(A) \leq 1$	Подія $A$ — випадання «герба» при підкиданні монети $P(A) = 0,5$			
<b>Вірогідні та неможливі події</b>				
<b>Вірогідна подія</b> — це подія $U$ , яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту $P(U) = 1$	Випадання менше 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок)			
<b>Неможлива подія</b> (її часто позначають $\emptyset$ ) не відбувається ні при якому повторенні експерименту $P(\emptyset) = 0$	Випадання 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика			



Класичне означення ймовірності	
<p>Для рівноможливих елементарних подій (тобто подій, імовірність яких однакова) імовірність події <math>A</math> — це відношення числа сприятливих для неї подій (<math>m</math>) до числа всіх рівноможливих подій (<math>n</math>) у даному експерименті:</p> $P(A) = \frac{m}{n}$	<p><b>Завдання.</b> Знайдіть імовірність випадання числа очок, кратного трьом, при підкиданні грального кубика.</p> <p><b>Розв'язання.</b> Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випадання 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (події попарно несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна із цих подій, отже, у цій задачі <math>n = 6</math>).</p> <p>Подія <math>A</math> — випадання числа очок, кратного трьом. Сприятливими для події <math>A</math> є тільки дві елементарні події — із випадання 3 або 6 очок (тобто <math>m = 2</math>).</p> <p>Тоді <math>P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}</math></p>

Таблиця 47. ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Основні поняття	
	<p><math>U</math> — деяка фігура на площині; <math>S(U)</math> — площа фігури <math>U</math>.</p> <p><b>Експеримент</b> — це випадковий вибір якоїсь точки <math>u</math> з фігури <math>U</math> (можна також вважати, що цю точку <math>u</math> випадково кинули на фігуру <math>U</math>).</p> <p><b>Елементарні події <math>u</math></b> — точки фігури <math>U</math>.</p> <p><math>A</math> — частина фігури <math>U</math> (<math>A \subseteq U</math>); <math>S(A)</math> — площа фігури <math>A</math>.</p> <p>Подія <math>A</math> — попадання точок <math>u</math> у фігуру <math>A</math>. Тоді <i>сприятливими елементарними подіями для події <math>A</math> будуть усі точки фігури <math>A</math></i>. (Припускаємо, що ймовірність попадання точки в частину фігури <math>U</math> пропорційна площі цієї частини і не залежить від її конфігурації та розміщення відносно фігури <math>U</math>)</p>
Означення геометричної ймовірності	
$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$	<p><b>Геометричною ймовірністю події <math>A</math></b> називається відношення площі фігури, сприятливої для події <math>A</math>, до площі всієї заданої фігури</p>

Таблиця 48. **ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА**

ПОНЯТТЯ	ПРИКЛАД						
<b>Поняття випадкової величини та її розподілу</b>							
<p>Під <i>випадковою величиною</i> в теорії ймовірностей розуміють змінну величину, яка в даному випадковому експерименті може набувати тих чи інших числових значень з певною ймовірністю.</p> <p>Позначають випадкові величини <i>великими латинськими літерами</i>: <math>X, Y, Z, \dots</math>, а їх значення — <i>відповідними малими літерами</i>: <math>x, y, z, \dots</math>. Той факт, що випадкова величина <math>X</math> набула значення <math>x</math>, записують так:</p> $X = x$	<p>Наприклад, в експерименті по підкиданню монети простір елементарних подій складається з двох подій: <math>u_1</math> — випадання «герба», <math>u_2</math> — випадання «числа». (Ці події несумісні, і в результаті експерименту обов’язково відбудеться одна з цих подій.)</p> <p>Якщо поставити у відповідність події <math>u_1</math> число 1, а події <math>u_2</math> — число 0 (тобто фактично вважати, що у випадку випадання «герба» випадає число 1, а у випадку випадання «числа» випадає число 0), то одержимо випадкову величину <math>X</math>, яка набуває тільки двох значень: <math>x_1 = 1, x_2 = 0</math> (тобто <math>X(u_1) = x_1 = 1, X(u_2) = x_2 = 0</math>). Розглянуту функцію — випадкову величину <math>X</math> — можна задати також за допомогою таблиці:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Результат експерименту</th> <th><math>u_1</math> — випав «герб»</th> <th><math>u_2</math> — випало «число»</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Значення <math>X</math></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </tbody> </table>	Результат експерименту	$u_1$ — випав «герб»	$u_2$ — випало «число»	Значення $X$	1	0
Результат експерименту	$u_1$ — випав «герб»	$u_2$ — випало «число»					
Значення $X$	1	0					
<b>Закон розподілу випадкової величини</b>							
<p>Закон розподілу кожної випадкової величини встановлює відповідність між значеннями випадкової величини і їх імовірностями, тобто є функцією, областю визначення якої є всі значення випадкової величини. Тому <b>законом розподілу випадкової величини <math>X</math> називається функція, яка кожному значенню <math>x</math> випадкової величини <math>X</math> ставить у відповідність число <math>P(X = x)</math> (імовірність події «випадкова величина <math>X</math> набула значення <math>x</math>)</b></p>	<p>Закон розподілу розглянутої випадкової величини задається таблицею:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>X</math></th> <th style="text-align: center;">1</th> <th style="text-align: center;">0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th><math>P</math></th> <td style="text-align: center;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\frac{1}{2}</math></td> </tr> </tbody> </table>	$X$	1	0	$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$X$	1	0					
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					

Таблиця 49. **СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДІВ ДАНИХ**

ПОНЯТТЯ	ПРИКЛАД
<b>Ранжирування ряду даних</b>	
<p>Під <i>ранжируванням ряду даних</i> розуміють розташування елементів цього ряду в порядку зростання (мається на увазі, що <i>кожне наступне число або більше, або не менше від попереднього</i>)</p>	<p>Якщо ряд даних вибірки має вигляд  <math>5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4</math>,                      то після ранжирування він перетворюється на ряд  <math>3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9</math> (1)</p>

Розмах вибірки ( $R$ )											
<i>Розмах вибірки</i> — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці	Для ряду (1) розмах вибірки: $R = 9 - 3 = 6$										
Мода ( $M_o$ )											
<i>Мода</i> — це те значення випадкової величини, яке зустрічається найчастіше	У ряду (1) значення 4 зустрічається найчастіше, отже, $M_o = 4$										
Медіана ( $M_e$ )											
<p><i>Медіана</i> — це так зване <i>серединне значення впорядкованого ряду значень</i> випадкової величини:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>— якщо кількість чисел у ряду <i>непарна</i>, то медіана — це число, записане <i>посередині</i>;</li> <li>— якщо кількість чисел у ряду <i>парна</i>, то медіана — це <i>середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині</i></li> </ul>	<p>Для ряду (1), у якому 9 членів, медіана — це середнє (тобто п'яте) число — 5: <math>M_e = 5</math>.</p> <p>Якщо розглянути ряд 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9, у якому 10 членів, то медіана — це середнє арифметичне п'ятого і шостого членів: <math>M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5</math></p>										
Середнє значення ( $\bar{X}$ ) випадкової величини $X$											
<p><i>Середнім значенням випадкової величини <math>X</math></i> називається <i>середнє арифметичне всіх її значень</i>.</p> <p>Якщо випадкова величина <math>X</math> набуває <math>n</math> значень <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math>, то</p> $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2)$ <p>Якщо випадкова величина <math>X</math> набуває значень <math>x_1, x_2, \dots, x_k</math> з частотами <math>m_1, m_2, \dots, m_k</math> відповідно (тоді <math>\sum M = n</math>), то середнє арифметичне можна обчислювати за формулою</p> $\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{n} \quad (3)$	<p>Нехай випадкова величина <math>X</math> задана таблицею розподілу за частотами <math>M</math>:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>X</math></td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">7</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>M</math></td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">2</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>\sum M = n = 8</math>.</p> <p>Тоді за формулою (2)</p> $\bar{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$ <p>або за формулою (3)</p> $\bar{X} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$	$X$	2	4	5	7	$M$	3	1	2	2
$X$	2	4	5	7							
$M$	3	1	2	2							

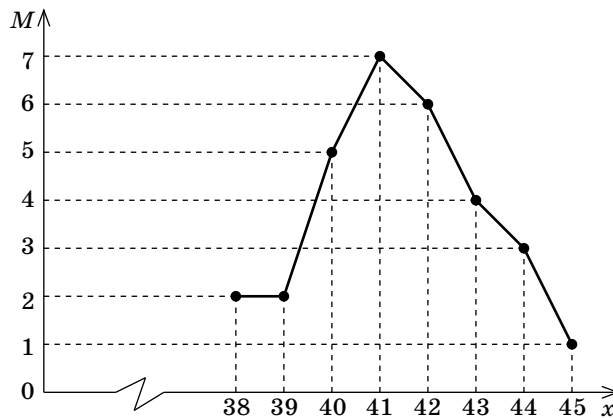
Таблиця 50. ПОНЯТТЯ ПОЛІГОНА ЧАСТОТ

Розподіл випадкових величин можна задавати й ілюструвати графічно. Нехай випадкова величина  $X$  — розмір взуття 30 хлопців 11 класу однієї зі шкіл — має розподіл за частотами, який подано в таблиці:

$X$	38	39	40	41	42	43	44	45
$M$	2	2	5	7	6	4	3	1

Позначимо на координатній площині точки з координатами  $(x_1; m_1), (x_2; m_2), \dots, (x_8; m_8)$  і з'єднаємо їх послідовно відрізками. Одержану ламану лінію називають *полігоном частот*.

**Означення.** *Полігоном частот називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки з координатами  $(x_1; m_1), (x_2; m_2), \dots, (x_k; m_k)$ , де  $x_i$  — значення випадкової величини, а  $m_i$  — відповідні їм частоти ( $i = 1; 2; \dots; k$ )*



## Тестові завдання до розділу 4 «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики»

Завдання 1–18 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. У ящику міститься 15 червоних і 5 чорних кульок. Знайдіть імовірність того, що навмання витягнута кулька буде чорною.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$

*Розв'язання.* За класичним означенням імовірності  $P(A) = \frac{m}{n}$ , де  $n$  — число всіх рівноможливих подій у даному експерименті, а  $m$  — число сприятливих подій для події  $A$  (у даному випадку подія  $A$  — витягання чорної кульки). Розглянемо як елементарну випадкову подію витягання кульки з ящика\*. Оскільки в ящику всього  $15 + 5 = 20$  кульок, то загальна кількість усіх рівноможливих подій  $n = 20$ , а оскільки в ящику тільки 5 чорних кульок, то число сприятливих (для події  $A$ ) подій  $m = 5$ . Тоді  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ . Отже, правильна відповідь Д.

2. У коробці лежать 15 олівців, з яких 3 червоні, а решта — чорні. Знайдіть імовірність того, що навмання витягнутий олівець буде чорним.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. З натуральних чисел від 1 до 18 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 18?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$

*Вказівка.* Слід урахувати, що натуральними дільниками числа 18 є тільки числа 1; 2; 3; 6; 9; 18.

\* За умовою кульки витягаються навмання, тому ймовірність витягти будь-яку з кульок одна і та сама, тобто всі розглянуті елементарні події рівноможливі.

4. У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких 20 — червоні, 10 — зелені, а решта — жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює 0,6.

А	Б	В	Г	Д
10	20	45	30	55

*Розв'язання.* Нехай у коробці лежить  $x$  жовтих кульок. Тоді всього в ящику лежить  $20+10+x=30+x$  кульок, тобто в даному випадку загальна кількість усіх подій\*:  $n=30+x$ , а оскільки в ящику тільки  $x$  жовтих кульок, то число сприятливих подій  $m=x$ . Тоді за класичним означенням імовірності  $P=\frac{m}{n}=\frac{x}{30+x}$ . Але за умовою  $P=0,6$ . Отже,  $\frac{x}{30+x}=0,6$ . Тоді  $x=18+0,6x$ ;  $0,4x=18$ ;  $x=45$ . Тобто правильна відповідь **В**.

*Зауваження.* Для одержання правильної відповіді можна було для кожного варіанта відповіді знаходити відповідну ймовірність витягання жовтої кульки. Наприклад, для варіанта відповіді А:  $n=20+10+10=40$ ,  $m=10$ . Тоді  $P=\frac{m}{n}=\frac{10}{40}=0,25 \neq 0,6$ , отже, відповідь А не є правильною. Аналогічно розглядаємо всі інші варіанти відповіді й вибираємо правильний — **В**.

5. У коробці лежать різнокольорові олівці, з яких 11 — червоні, 10 — сині, а решта — чорні. З'ясуйте, скільки чорних олівців лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином чорного олівця дорівнює 0,25.

А	Б	В	Г	Д
11	10	9	8	7

6. У ящику 6 білих і 3 чорних кульки. Яка ймовірність того, що навмання витягнуті дві кульки будуть різного кольору?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

7. Олена забула останні дві цифри телефону подруги, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть імовірність того, що з першої спроби вона правильно набере телефон подруги.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{100}$

\* В описаній ситуації елементарною випадковою подією є витягання навмання кульки з ящика.

8. Задано цифри 3; 4; 5; 6; 7; 9. З них утворюють усі можливі шестицифрові числа, використовуючи кожен цифру тільки один раз. Знайдіть імовірність того, що взяте навмання одне з цих чисел ділитиметься на 5.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

9. Задано цифри 1; 2; 3; 5; 6. Знайдіть кількість парних п'ятицифрових чисел, які можна скласти із цифр, використовуючи кожен цифру тільки один раз.

А	Б	В	Г	Д
24	48	72	120	240

10. Скількома різними способами можна скласти триколіоровий прапор з горизонтальними смугами заданої ширини (див. рисунок), якщо є тканина п'яти різних кольорів?

А	Б	В	Г	Д
5	15	20	60	120



11. Під час зустрічі 16 осіб потисли одне одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

А	Б	В	Г	Д
16	32	60	120	240

12. Група учнів із 20 осіб вирішила обмінятися фотокартками. Скільки всього фотокарток потрібно було для цього?

А	Б	В	Г	Д
20	40	120	190	380

13. Скільки прямих ліній можна провести через 7 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?

А	Б	В	Г	Д
7	14	21	28	42

14. Укажіть число всіх діагоналей правильного восьмикутника.

А	Б	В	Г	Д
8	16	20	28	56

15. Серед членів шахового гуртка дві дівчинки і шість хлопців. Для участі в змаганнях необхідно скласти команду з чотирьох осіб, у яку обов'язково повинна ввійти хоча б одна дівчинка. Укажіть, скількома способами це можна зробити.

А	Б	В	Г	Д
8	12	20	35	55

16. В учня в таблиці стоять оцінки, які подано в таблиці (у першому рядку наведені оцінки в балах, а в другому — кількість відповідних оцінок):

Оцінка в балах	6	8	9	10	11
Кількість оцінок	2	4	2	1	1

Знайдіть середній бал табеля.

А	Б	В	Г	Д
8	8,3	8,5	8,7	Інша відповідь

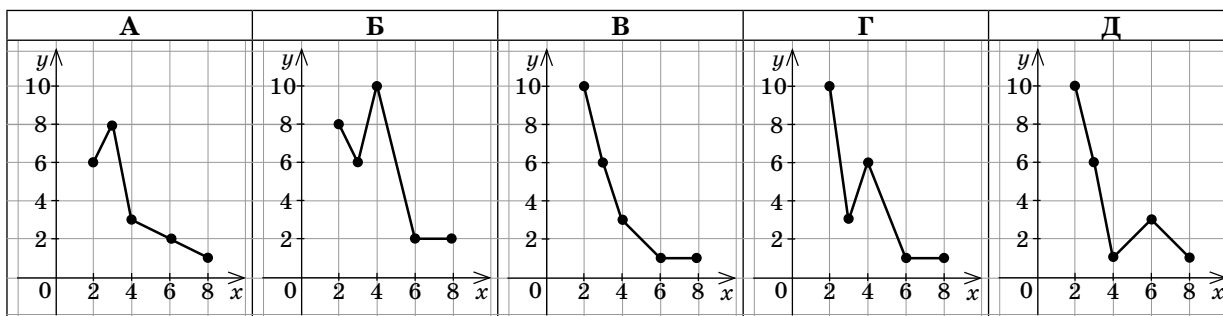
17. Середній вік учнів одного класу дорівнює 16 років. Обчисліть середній вік цих учнів через два роки.

А	Б	В	Г	Д
15 років	16 років	17 років	18 років	Неможливо обчислити

18. Після весняних канікул учитель математики провів опитування учнів одинадцятого класу про кількість задач, які вони розв'язали за канікули, готуючись до ЗНО. Результати подано в таблиці:

$X$	2	3	4	6	8
$M$	10	6	1	3	1

( $X$  — кількість задач, розв'язаних учнем за канікули,  $M$  — кількість учнів, які розв'язали таку кількість задач.) На якому з полігонів правильно проілюстровано заданий розподіл частот?





Розв'яжіть завдання 19–23. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу.

19. У коробці лежать цукерки, з яких 21 — у зелених обгортках, а решта — у червоних. Знайдіть кількість цукерок у червоних обгортках, якщо ймовірність витягти навмання цукерку в червоній обгортці дорівнює 0,3.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

20. Учаснику телевізійного шоу дозволяється відімкнути довільні два сейфи із п'яти запропонованих (у двох із них лежать призи, а решта — порожні). Обчисліть імовірність отримання двох призів.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

21. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 21 рік. Під час гри одного з футболістів було вилучено з поля, після чого середній вік гравців, що залишилися, став 20 років. Скільки років футболісту, який залишив поле?

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

22. У шаховому турнірі брали участь 6 шахістів. Учасники турніру зіграли кожен з кожним тільки по одній партії. Знайдіть, скільки всього шахових партій було зіграно на цьому турнірі.

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

23. Монету підкинули два рази. Знайдіть імовірність того, що хоча б один раз з'явиться «герб».

*Відповідь:* \_\_\_\_\_

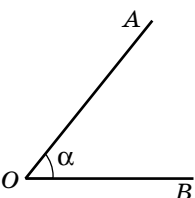
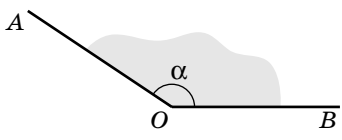
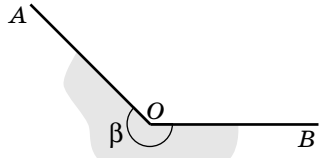
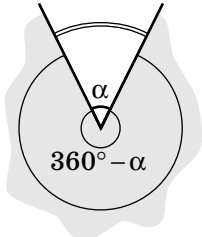
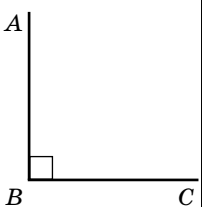
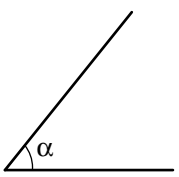
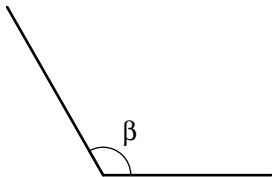

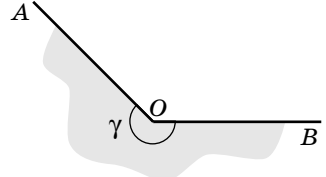
# Розділ 5

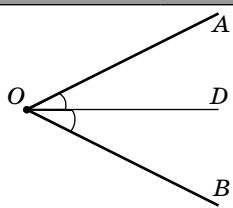
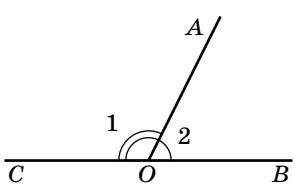
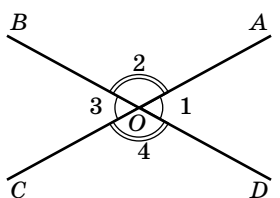
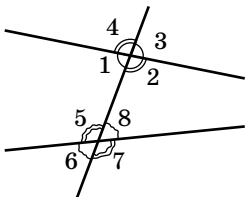
## ГЕОМЕТРІЯ

### Основні поняття, формули, властивості до розділу 5 «Геометрія»

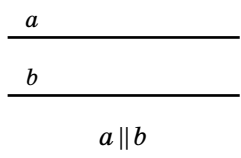
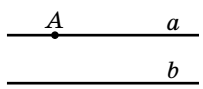
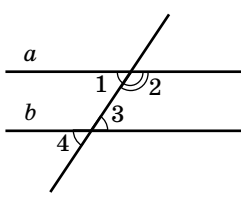
#### ПЛАНІМЕТРІЯ

Таблиця 51. КУТИ

Поняття кута				
КУТ ЯК «КАРКАСНА» ФІГУРА	ПЛОСКИЙ КУТ			
 <p style="text-align: center;"><math>\angle AOB = \alpha</math> (<math>0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ</math>)</p> <p><b>Кут</b> — це фігура, яка складається з точки — вершини кута — і двох променів, які виходять із цієї точки, — сторін кута</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">  <p style="text-align: center;"><math>\angle AOB = \alpha</math> (<math>0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ</math>)</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p><b>Кут</b> — частина площини, обмежена двома променями зі спільним початком</p>  <p style="text-align: center;"><math>\angle AOB = \beta</math> (<math>0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ</math>)</p> </div> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;">  <p style="text-align: center;"><math>360^\circ - \alpha</math></p> </div>			
Види кутів				
ПРЯМИЙ	ГОСТРИЙ	ТУПИЙ	РОЗГОРНУТИЙ	БІЛЬШИЙ ЗА РОЗГОРНУТИЙ
 <p style="text-align: center;"><math>\angle ABC = 90^\circ</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>0^\circ &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>90^\circ &lt; \beta &lt; 180^\circ</math></p>	<p>Сторони розгорнутого кута — доповняльні промені</p>  <p style="text-align: center;"><math>\angle AOB = 180^\circ</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>180^\circ &lt; \gamma \leq 360^\circ</math></p>

Бісектриса кута															
	<p><b>Бісектриса кута</b> — це промінь, який виходить із вершини кута, лежить у його внутрішній області й ділить кут на два рівні кути</p> <p>Промінь <math>OD</math> — бісектриса кута <math>AOB</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\angle AOD = \angle BOD</math></p>														
Суміжні та вертикальні кути (розглядаються кути, менші за розгорнутий кут)															
СУМІЖНІ КУТИ	ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ														
 <p style="text-align: center;"><math>\angle 1</math> і <math>\angle 2</math> — суміжні</p> <p style="text-align: center;"><math>\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Сума суміжних кутів дорівнює <math>180^\circ</math></b></p>	 <p style="text-align: center;"><math>\angle 1</math> і <math>\angle 3</math> — вертикальні <math>\angle 2</math> і <math>\angle 4</math> — вертикальні</p> <p style="text-align: center;"><math>\angle 1 = \angle 3</math> <math>\angle 2 = \angle 4</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Вертикальні кути рівні</b></p>														
Кути при перетині двох прямих січною															
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 1</math> і <math>\angle 5</math></td> <td style="padding: 5px;">— внутрішні односторонні</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 4</math> і <math>\angle 5</math></td> <td rowspan="2" style="padding: 5px;">— відповідні</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 2</math> і <math>\angle 8</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 3</math> і <math>\angle 8</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 1</math> і <math>\angle 8</math></td> <td style="padding: 5px;">— внутрішні різносторонні</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 1</math> і <math>\angle 6</math></td> <td rowspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 2</math> і <math>\angle 5</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\angle 2</math> і <math>\angle 7</math></td> </tr> </table>	$\angle 1$ і $\angle 5$	— внутрішні односторонні	$\angle 4$ і $\angle 5$	— відповідні	$\angle 2$ і $\angle 8$		$\angle 3$ і $\angle 8$	$\angle 1$ і $\angle 8$	— внутрішні різносторонні	$\angle 1$ і $\angle 6$		$\angle 2$ і $\angle 5$		$\angle 2$ і $\angle 7$
$\angle 1$ і $\angle 5$	— внутрішні односторонні	$\angle 4$ і $\angle 5$	— відповідні												
$\angle 2$ і $\angle 8$		$\angle 3$ і $\angle 8$													
$\angle 1$ і $\angle 8$	— внутрішні різносторонні	$\angle 1$ і $\angle 6$													
$\angle 2$ і $\angle 5$		$\angle 2$ і $\angle 7$													

Таблиця 52. ПАРАЛЕЛЬНІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Паралельні прямі		
 <p style="text-align: center;"><math>a \parallel b</math></p>	<p>Дві прямі називаються <b>паралельними</b>, якщо вони лежать в одній площині й не перетинаються.</p> <p>Через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній</p>	
	ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ	ВЛАСТИВОСТІ
	<p>Якщо <math>\angle 1 = \angle 3</math> (внутрішні різносторонні кути рівні), або <math>\angle 1 = \angle 4</math> (відповідні кути рівні), або <math>\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ</math> (сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює <math>180^\circ</math>),</p> <p style="text-align: center;">----- то <math>a \parallel b</math></p>	<p>Якщо <math>a \parallel b</math>,</p> <p style="text-align: center;">-----</p> <p>то <math>\angle 1 = \angle 3</math>, <math>\angle 1 = \angle 4</math>, <math>\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ</math></p>

Закінчення таблиці 52

	<p>Якщо <math>a \perp c, b \perp c,</math> ----- то <math>a \parallel b</math></p>	<p>Якщо <math>a \parallel b, c \perp a,</math> ----- то <math>c \perp b</math></p>
	<p>Якщо <math>a \parallel b, b \parallel c,</math> ----- то <math>a \parallel c</math></p>	

**Перпендикулярні прямі**

	<p>Дві прямі називаються <b>перпендикулярними</b>, якщо вони <i>перетинаються під прямим кутом</i></p> <p style="text-align: center;"><math>a \perp b \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ</math></p> <p>Через задану точку можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної</p>	
--	---	--

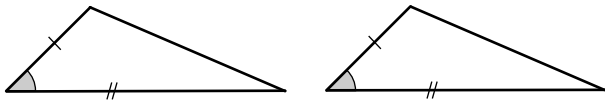
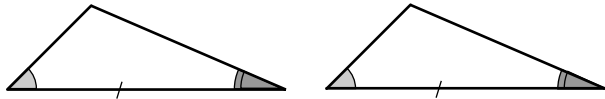
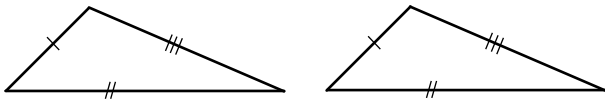
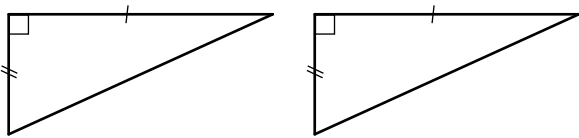
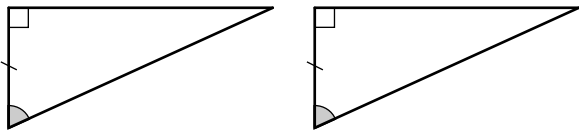
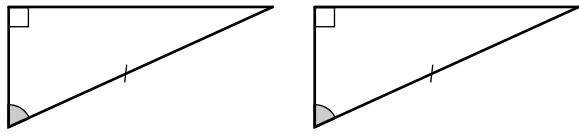
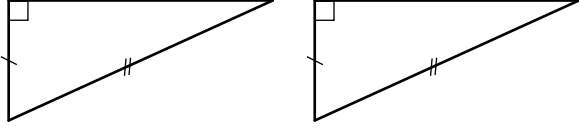
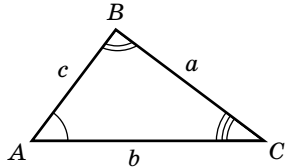
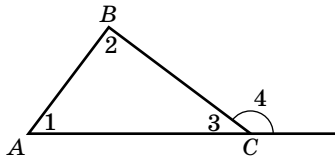
**Перпендикуляр до прямої**

	<p style="text-align: center;"><math>OA \perp a \ (A \in a)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>OA</math> — перпендикуляр до <math>a</math> <math>A</math> — основа перпендикуляра</p> <p style="text-align: center;"><math>OA \perp a \ (A \in a), OA</math> — відстань від точки <math>O</math> до прямої <math>a</math></p> <p><b>Перпендикуляр</b> — найкоротша відстань від заданої точки до точок заданої прямої</p>
--	--

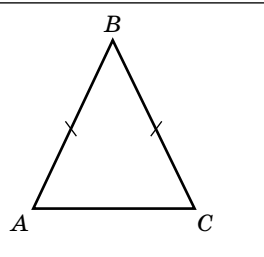
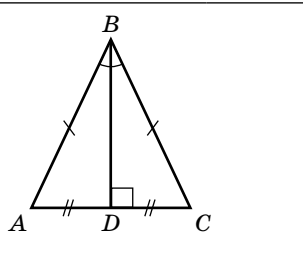
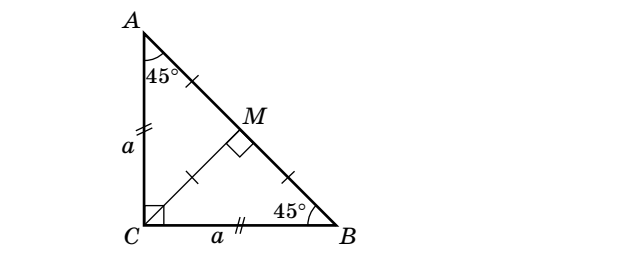
Таблиця 53. **ТРИКУТНИКИ**

**Рівність трикутників**

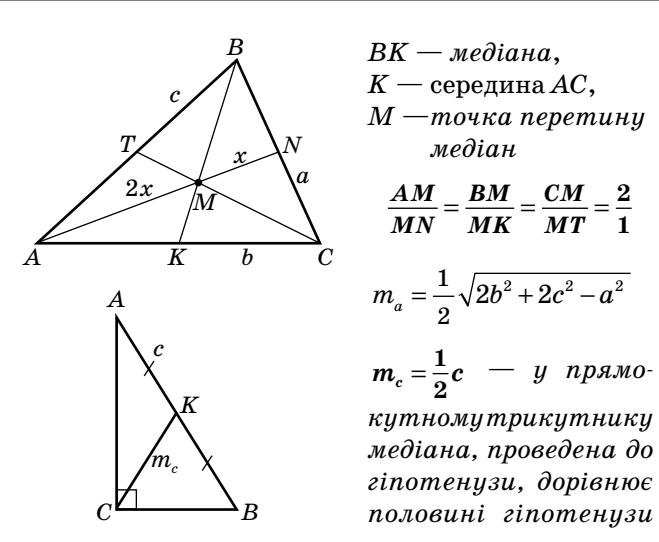
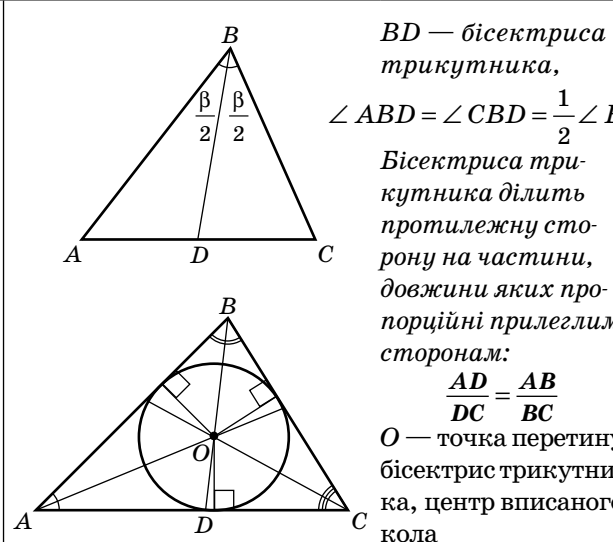
	<p>Дві фігури називаються <b>рівними</b>, якщо вони рухом переводяться одна в одну</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> <math>\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1</math> </div> <div style="margin-right: 10px;"> <math>\Leftrightarrow</math> </div> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>AB = A_1B_1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\angle A = \angle A_1</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>AC = A_1C_1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\angle B = \angle B_1</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>BC = B_1C_1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\angle C = \angle C_1</math></td> </tr> </table> </div>	$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$	$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$	$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$
$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$						
$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$						
$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$						

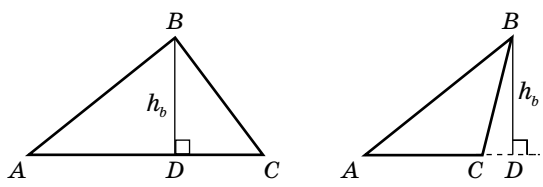
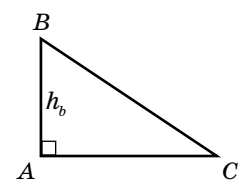
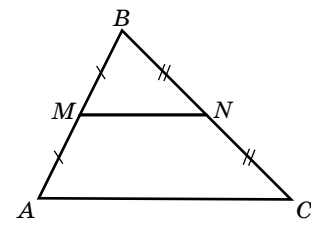
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ	
	1. За двома сторонами і кутом між ними
	2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами
	3. За трьома сторонами
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ	
	1. За двома катетами
	2. За катетом і гострим кутом
	3. За гіпотенузою і гострим кутом
	4. За гіпотенузою і катетом
Властивості сторін та кутів трикутника	
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ Сума кутів трикутника дорівнює $180^\circ$  $ b - c  < a < b + c$ — нерівність трикутника	<b>ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА</b>  $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ $\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$

Таблиця 54. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

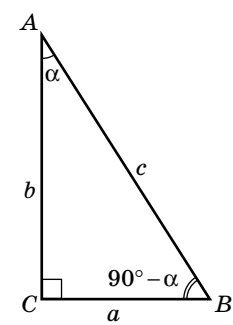
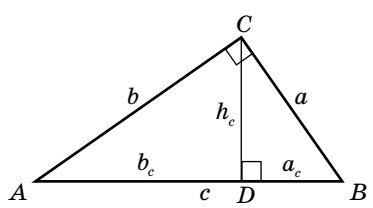
		<p>Трикутник називається <b>рівнобедреним</b>, якщо у нього дві сторони рівні</p> <p><math>\triangle ABC</math> — рівнобедрений (<math>AB = BC</math>)</p> <p><math>AC</math> — основа; <math>AB</math> і <math>BC</math> — бічні сторони</p>
ВЛАСТИВОСТІ		ОЗНАКИ
<p>1. Якщо в <math>\triangle ABC</math> <math>AB = BC</math>, то <math>\angle A = \angle C</math> (кути при основі рівні)</p>	<p>1. Якщо в <math>\triangle ABC</math> <math>\angle A = \angle C</math>, то <math>AB = BC</math></p>	
<p>2. Якщо <math>\triangle ABC</math> — рівнобедрений і <math>BD</math> — медіана, то <math>BD</math> — висота й бісектриса</p> <p>У рівнобедреному трикутнику <b>висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються</b></p>	<p>2. Якщо в трикутнику збігаються:</p> <p>а) висота й медіана, або</p> <p>б) висота й бісектриса, або</p> <p>в) медіана й бісектриса, то трикутник рівнобедрений</p>	
Рівнобедрений прямокутний трикутник		
	<p><math>\angle C = 90^\circ</math>, <math>AC = CB</math>,  <math>\angle A = \angle B = 45^\circ</math>  <math>CM \perp AB</math>, тоді <math>CM = AM = MB</math></p> <p><math>AC = CB = a</math>, тоді <math>AB = a\sqrt{2}</math></p>	

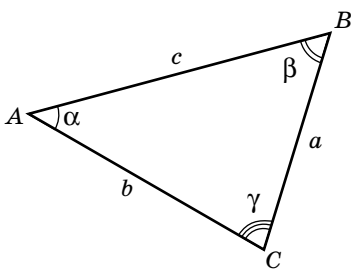
Таблиця 55. ВИСОТА, МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА ТА СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

Медіана трикутника	Бісектриса трикутника
 <p><math>BK</math> — медіана,  <math>K</math> — середина <math>AC</math>,  <math>M</math> — точка перетину медіан</p> $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$ $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ <p><math>m_c = \frac{1}{2}c</math> — у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи</p>	 <p><math>BD</math> — бісектриса трикутника,  <math>\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle B</math></p> <p>Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на частини, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам:</p> $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ <p><math>O</math> — точка перетину бісектрис трикутника, центр вписаного кола</p>

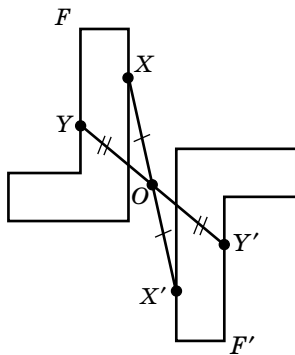
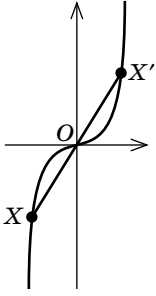
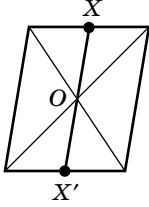
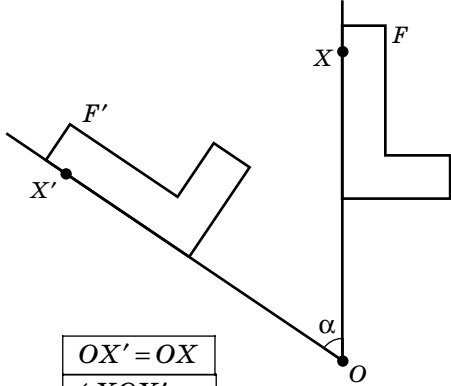
Висота трикутника	
<p><math>BD</math> — висота, <math>BD \perp AC</math></p> 	<p>Для прямокутного трикутника:  <math>BA</math> — висота (<math>\angle A = 90^\circ</math>)</p> 
<p>Прямі, що містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці (<b>ортоцентр</b>)</p> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}</math> </div> <p>Висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам</p> </div>	
Середня лінія трикутника	
	<p><math>MN</math> — середня лінія,  <math>M</math> — середина <math>AB</math>,  <math>N</math> — середина <math>BC</math></p> <p style="text-align: center;"><math>MN \parallel AC</math></p> <p style="text-align: center;"><math>MN = \frac{1}{2} AC</math></p> <p style="text-align: center;"><i>Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони</i></p>

Таблиця 56. СПІВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ В ТРИКУТНИКУ

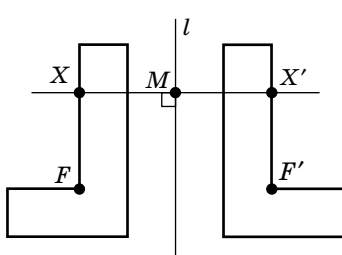
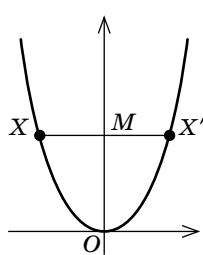
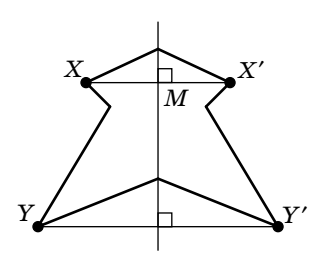
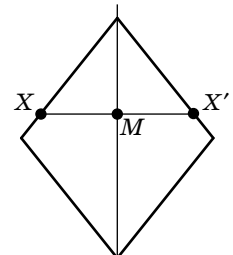
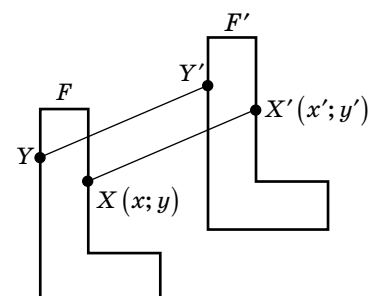
Прямокутний трикутник	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> <math>a^2 + b^2 = c^2</math> </div> <p><b>ТЕОРЕМА ПІФАГОРА</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}</math>  <math>\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>a = c \cdot \sin \alpha</math>  <math>b = c \cdot \cos \alpha</math>  <math>a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha</math> </div> </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> <math>h_c^2 = a_c \cdot b_c</math>  <math>a^2 = c \cdot a_c</math>  <math>b^2 = c \cdot b_c</math> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <p><math>\triangle ACD \sim \triangle ABC</math></p> <p><math>\triangle CBD \sim \triangle ABC</math></p> <p><math>\triangle ACD \sim \triangle CBD</math></p> </div> <p><math>a, b</math> — катети; <math>c</math> — гіпотенуза</p>

Довільний трикутник	
	<p style="text-align: center;"><b>ТЕОРЕМА СИНУСІВ</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: fit-content;"> <math display="block">\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R</math> </div> <p style="text-align: center;"><b>ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: fit-content;"> <math display="block">c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma</math> </div> <p style="text-align: center;"> <math>a, b, c</math> — сторони трикутника;  <math>R</math> — радіус описаного кола                 </p>
Наслідки	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Якщо у трикутнику <math>c^2 = a^2 + b^2</math>, то <math>\gamma = 90^\circ</math>, тобто цей трикутник є прямокутним (теорема, обернена до теореми Піфагора)</li> <li>2. Якщо у трикутнику <math>c^2 &lt; a^2 + b^2</math>, то кут <math>\gamma</math> — гострий (<math>\cos \gamma &gt; 0</math>); якщо <math>c</math> — найбільша сторона, то трикутник є гострокутним</li> <li>3. Якщо <math>c^2 &gt; a^2 + b^2</math>, то кут <math>\gamma</math> — тупий (<math>\cos \gamma &lt; 0</math>)</li> <li>4. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона:</li> </ol> <p style="text-align: center; margin-left: 100px;"><math>a &gt; b \Leftrightarrow \alpha &gt; \beta</math></p>	

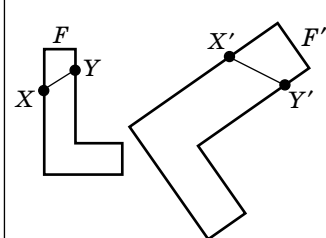
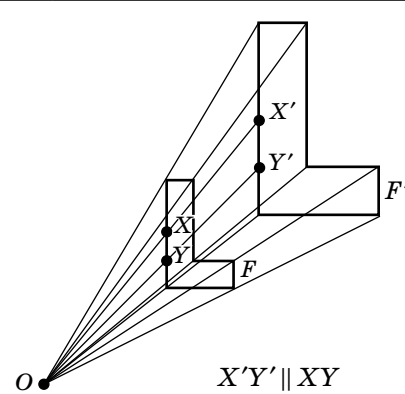
Таблиця 57. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР. РУХИ

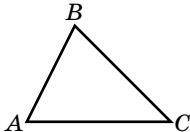
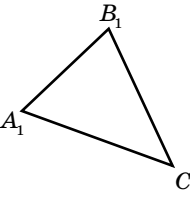
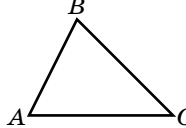
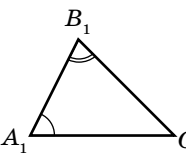
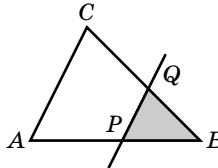
<p><i>Рух</i> — це перетворення, при якому зберігаються відстані між точками фігури. <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>X'Y' = XY</math></span></p> <p>Під час руху зберігаються кути між променями.</p> <p>Дві фігури називаються рівними, якщо вони рухом переводяться одна в одну.</p>	
Симетрія відносно точки	Поворот
<div style="display: flex; justify-content: space-around;">    </div> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;"><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>OX' = OX</math></span></p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <div style="margin-top: 10px;"> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>OX' = OX</math></span>  <span style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>\angle XOX' = \alpha</math></span> </div>



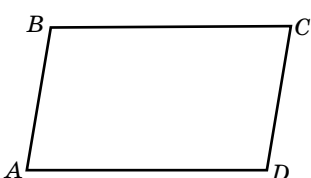
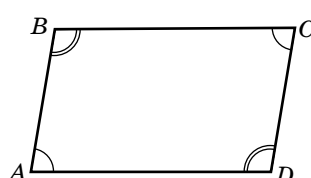
Симетрія відносно прямої			
			
			
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;"><math>XX' \perp l</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;"><math>XM = MX'</math></td> </tr> </table>		$XX' \perp l$	$XM = MX'$
$XX' \perp l$			
$XM = MX'$			
Паралельне перенесення			
	<p><b>Точки зміщуються</b> вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) <b>на одну й ту саму відстань</b></p> <p style="text-align: center;"> <math>X(x; y) \rightarrow X'(x'; y')</math>  <math>x' = x + a; y' = y + b</math> </p>		

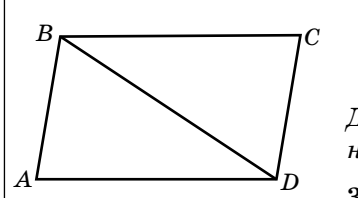
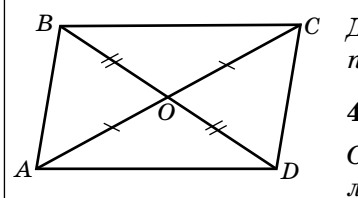
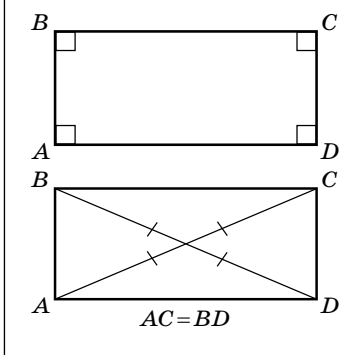
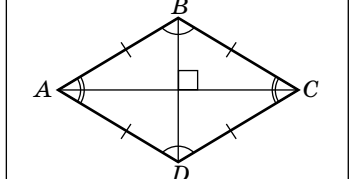
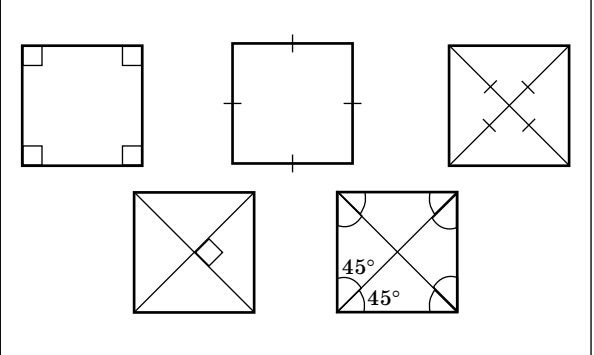
Таблиця 58. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Означення і властивості	Гомотетія
<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p><b>Перетворення подібності</b> — це перетворення, при якому відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Перетворення подібності зберігає кути між променями.</li> <li>2. У подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні</li> </ol> </div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px; width: fit-content;"> <math>\frac{X'Y'}{XY} = k</math> — коефіцієнт подібності         </div>	<div style="text-align: center;">  <p style="text-align: center;"><math>X'Y' \parallel XY</math></p> </div> <p>Якщо точка X відображується в точку X', то це означає:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) точка X' лежить на промені OX;</li> <li>2) <math>\frac{OX'}{OX} = k</math></li> </ol>

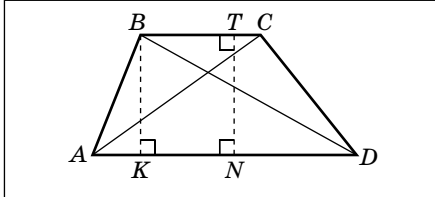
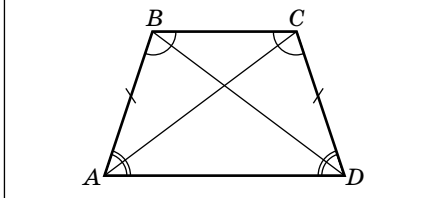
Подібність трикутників		
ОЗНАЧЕННЯ	ВЛАСТИВОСТІ	ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ
  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$	<p>У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні</p> $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{h_1}{h} = \frac{R_1}{R} = k$ $\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$ $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = k^2$ <p>Два трикутники називаються <b>подібними</b>, якщо вони переводяться один в одній перетворенням подібності</p>	   <p><b>1. За двома рівними кутами</b> Якщо <math>\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1</math>, то <math>\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1</math></p> <p><b>2. За двома пропорційними сторонами і кутом між ними</b> Якщо <math>\angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}</math>, то <math>\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1</math></p> <p><b>3. За трьома пропорційними сторонами</b> Якщо <math>\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}</math>, то <math>\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1</math></p> <p><b>4. Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний до даного.</b> Якщо <math>PQ \parallel AC</math>,</p>

Таблиця 59. ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВИДИ

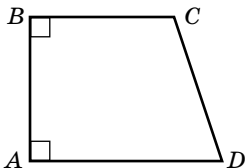
	<p>Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називається <b>паралелограмом</b></p> $ABCD \text{ — паралелограм} \Leftrightarrow AB \parallel CD, BC \parallel AD$
Властивості	Ознаки
 <p><b>1.</b> Якщо <math>ABCD</math> — паралелограм, то <math>AB = DC; AD = BC; \angle A = \angle C; \angle B = \angle D</math>.</p> <p>У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні</p>	<p><b>1.</b> Якщо <math>ABCD</math> — чотирикутник і <math>AB \parallel CD; AB = CD</math>, то <math>ABCD</math> — паралелограм.</p> <p>Якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм</p>

 	<p>2. Якщо <math>ABCD</math> — паралелограм і <math>BD</math> — діагональ, ----- то <math>\triangle ABD = \triangle CDB</math>.</p> <p>Діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники</p> <p>3. Якщо <math>ABCD</math> — паралелограм, <math>AC</math> і <math>BD</math> — діагоналі, ----- то <math>AO = OC</math>; <math>BO = OD</math>.</p> <p>Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл</p> <p>4. <math>AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)</math>.</p> <p>Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін</p>	<p>2. Якщо <math>ABCD</math> — чотирикутник і <math>AB = DC</math>; <math>AD = BC</math>, ----- то <math>ABCD</math> — паралелограм.</p> <p>Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.</p> <p>3. Якщо <math>ABCD</math> — чотирикутник і <math>AO = OC</math>; <math>BO = OD</math>, ----- то <math>ABCD</math> — паралелограм.</p> <p>Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм</p>
Прямокутник	Ромб	Квадрат
	 <p>Усі сторони ромба рівні. Діагоналі ромба перпендикулярні. Діагоналі є бісектрисами кутів ромба</p>	

Таблиця 60. ТРАПЕЦІЯ

	<p><math>BC \parallel AD</math> Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші сторони непаралельні, називається трапецією</p> <p><math>ABCD</math> — трапеція; <math>AD</math> і <math>BC</math> — основи; <math>AB</math> і <math>CD</math> — бічні сторони; <math>AC</math> і <math>BD</math> — діагоналі; <math>BK</math> і <math>TN</math> — висоти</p>
Окремі види трапеції	
	<p><b>Рівнобічна трапеція</b> — трапеція з рівними бічними сторонами (<math>AB = CD</math>)</p> <p><b>ВЛАСТИВОСТІ</b></p> <p><math>\angle A = \angle D</math> Куты при основі рівні (також <math>\angle B = \angle C</math>)</p> <p><math>AC = BD</math> Діагоналі рівні</p>

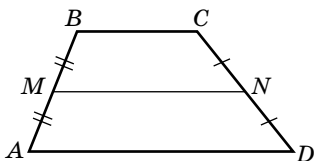
Закінчення таблиці 60



**Прямокутна трапеція** — це трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна до основ

$$h_{\text{прямокутн. трапеції}} = AB$$

**Середня лінія трапеції**



Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається *середньою лінією трапеції*

$$MN \text{ — середня лінія}$$

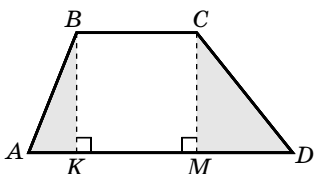
**ВЛАСТИВОСТІ**

$$\begin{matrix} MN \parallel AD \\ MN \parallel BC \end{matrix}$$

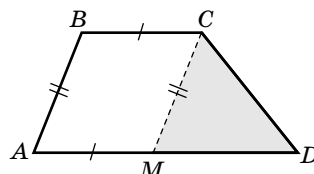
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

*Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі*

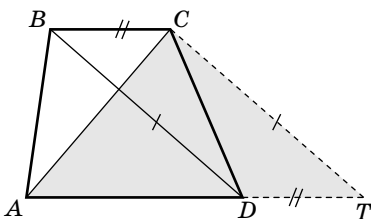
**Типові додаткові побудови для трапеції (зображені штриховими лініями)**



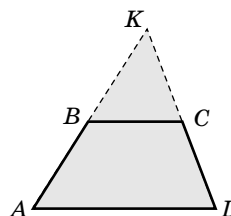
$$\begin{matrix} BK \perp AD \\ CM \perp AD \end{matrix}$$



$$CM \parallel BA$$

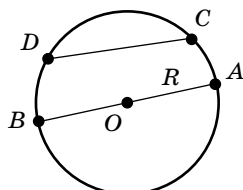


$$CT \parallel BD$$



$$\begin{matrix} AB \text{ і } CD \\ \text{продовжити} \\ \text{до перетину} \end{matrix}$$

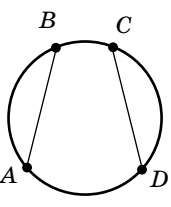
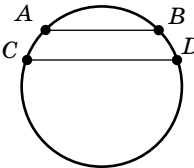
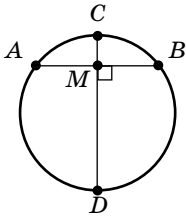
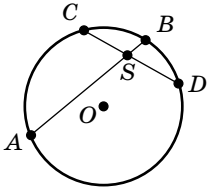
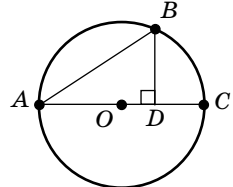
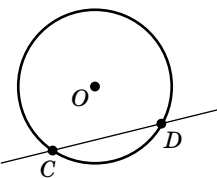
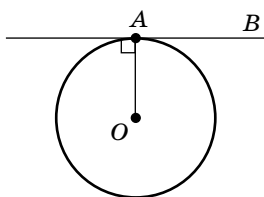
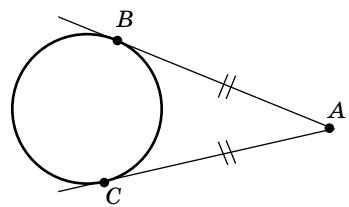
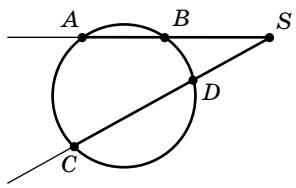
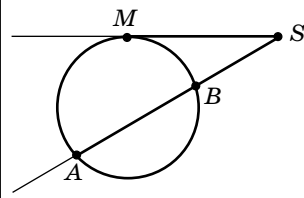
Таблиця 61. КОЛО, ХОРДИ, ДУГИ, ДОТИЧНІ Й СІЧНІ



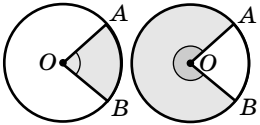
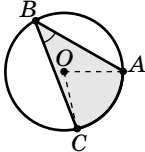
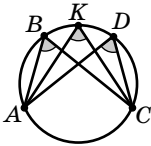
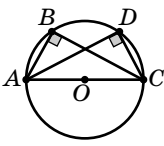
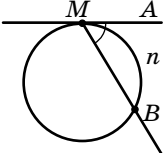
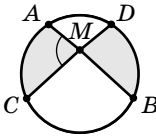
**Коло** — це фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра)

$O$  — центр кола;  $OA$  — радіус;  $AB$  — діаметр;  $CD$  — хорда (відрізок, що сполучає дві точки кола)

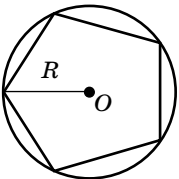
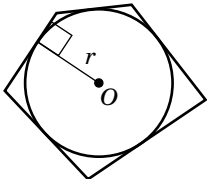
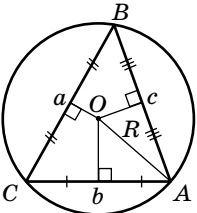
*Найбільшою хордою є діаметр*

Властивості дуг і хорд		
 <p> <math>\cup AB = \cup CD \Leftrightarrow AB = CD</math>                      Рівні дуги стягують рівні хорди (і навпаки)                 </p>	 <p> <math>AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD</math>                      Паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги                 </p>	 <p> <math>CD \perp AB \Leftrightarrow AM = MB</math>  <math>\cup AC = \cup CB</math>  <math>\cup AD = \cup DB</math> </p>
 <p> <math>AS \cdot SB = CS \cdot SD</math>                      S — точка перетину хорд AB і CD                 </p>	 <p>                     Якщо AB — хорда, AC — діаметр і <math>BD \perp AC</math>, то  <math>AB^2 = AC \cdot AD</math>  <math>BD^2 = AD \cdot DC</math> </p>	
Властивості дотичних і січних		
 <p>                     CD — січна — пряма, що має з колом дві спільні точки                 </p>	 <p> <math>OA \perp AB</math>                      AB — дотична — пряма, що має з колом лише одну спільну точку;                      A — точка дотику                 </p>	 <p> <math>AB = AC</math>                      AB і AC — дотичні                 </p>
 <p> <math>SA \cdot SB = SC \cdot SD</math>                      SA і SC — січні                 </p>	 <p> <math>SA \cdot SB = SM^2</math>                      SM — дотична;                      M — точка дотику;                      SA — січна                 </p>	

Таблиця 62. КУТИ У КОЛІ

Центральний кут	Вписаний кут
 <p><math>\angle AOB</math> — центральний кут (вершина центрального кута збігається із центром кола)</p> $\angle AOB = \cup AB$ <p>Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається</p>	 <p><math>\angle ABC</math> — вписаний кут (вершина вписаного кута лежить на колі, а сторони перетинають коло)</p> $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$ <p>Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу</p>
Властивості вписаних кутів	
 <p><math>\angle ABC = \angle AKC = \angle ADC</math> Вписані кути, які спираються на одну і ту саму дугу, рівні</p>	 <p><math>\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ</math> Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює <math>90^\circ</math></p>
Кут між дотичною і січною	Вписаний кут
 <p><math>MA</math> — дотична; <math>MB</math> — січна</p> $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$	 <p>Хорди <math>AB</math> і <math>CD</math> перетинаються в точці <math>M</math></p> $\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup DB)$

Таблиця 63. ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ

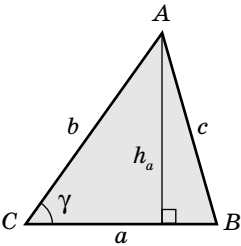
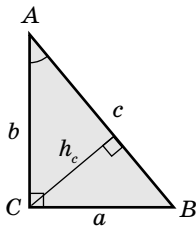
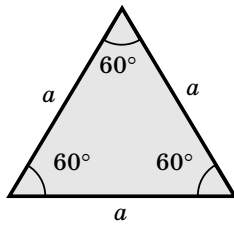
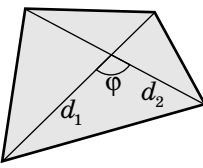
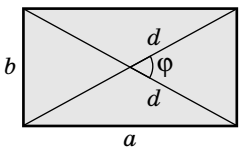
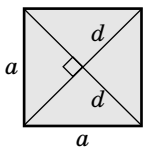
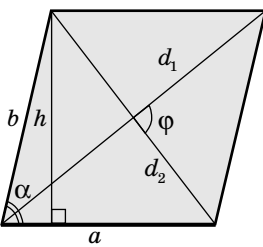
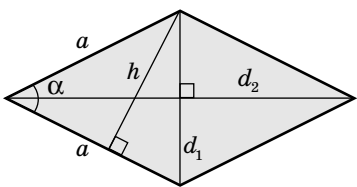
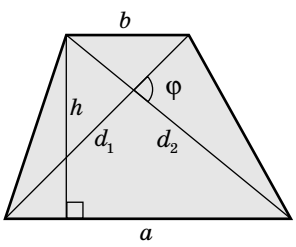
 <p><b>Вписаний многокутник</b> (усі вершини лежать на колі)</p> <p>Коло описане навколо многокутника</p>	 <p><b>Описаний многокутник</b> (усі сторони є дотичними до кола)</p> <p>Коло вписане в многокутник</p>
Коло, описане навколо трикутника	
 <p>Центр <math>O</math> — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника</p> $OA = OB = OC = R$ $R = \frac{a}{2 \sin A}; \quad R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$	

Положення центра кола, описаного навколо трикутника		
Гострокутний трикутник	Тупокутний трикутник	Прямокутний трикутник
		 Центр $O$ — середина гіпотенузи $R = \frac{c}{2}$
Коло, вписане в трикутник		
		Центр $O$ — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника $OD = r; OD \perp AB$ $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p}; p = \frac{a+b+c}{2}$
Прямокутний трикутник		Рівнобедрений трикутник
 $OK = OM = OD = r$ (OKCM — квадрат) $r = \frac{a+b-c}{2}$		 $AB = BC$ BD — висота, медіана і бісектриса; AO — бісектриса кута A $OD = r$

Таблиця 64. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ОПИСАНІ ТА ВПИСАНІ КОЛА

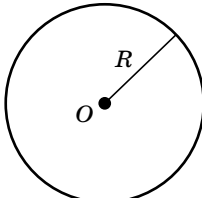
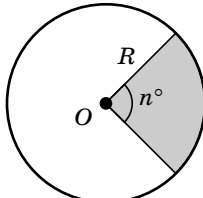
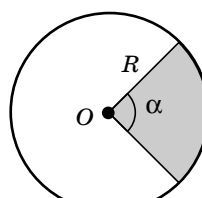
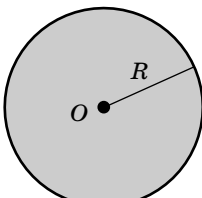
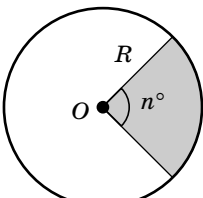
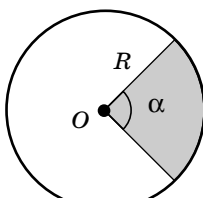
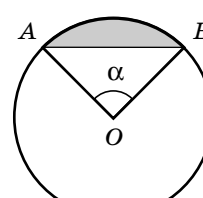
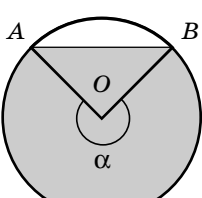
	Означення. Випуклий многокутник називається <i>правильним</i> , якщо у нього всі сторони і всі кути рівні				
ЗВ'ЯЗОК МІЖ СТОРОНОЮ ПРАВИЛЬНОГО $n$ -КУТНИКА І РАДІУСАМИ ОПИСАНОГО ТА ВПИСАНОГО КІЛ					
		$n$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
	$R$	$\frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$a$
$r$	$\frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	

Таблиця 65. ПЛОЩІ ТРИКУТНИКІВ І ЧОТИРИКУТНИКІВ

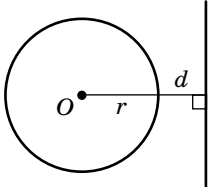
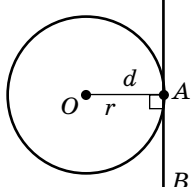
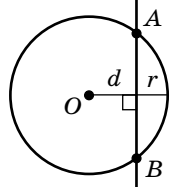
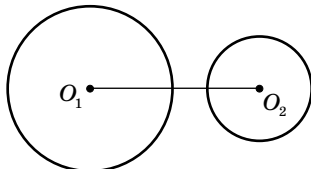
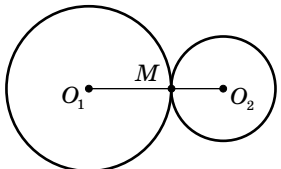
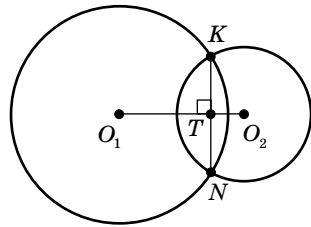
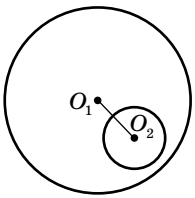
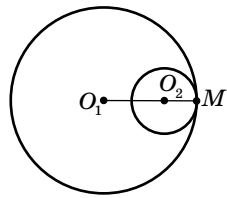
Площа трикутника		
<p><b>Довільний трикутник</b></p>  $S = \frac{1}{2} ah_a$ $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона}$ $\left( p = \frac{a+b+c}{2} \right)$ $S = \frac{abc}{4R}, \text{ де } R \text{ — радіус описаного кола}$ $S = r \cdot p, \text{ де } r \text{ — радіус вписаного кола}$	<p><b>Прямокутний трикутник</b></p>  $S = \frac{1}{2} ab$ $S = \frac{1}{2} ch_c$ $S = \frac{1}{2} bc \sin A$	<p><b>Правильний трикутник</b></p>  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
Площа чотирикутника		
<p><b>ДОВІЛЬНИЙ ЧОТИРИКУТНИК</b></p>  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$	<p><b>ПРЯМОКУТНИК</b></p>  $S = ab$ $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$	<p><b>КВАДРАТ</b></p>  $S = a^2$ $S = \frac{1}{2} d^2$
<p><b>ПАРАЛЕЛОГРАМ</b></p>  $S = a \cdot h$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$	<p><b>РОМБ</b></p>  $S = a \cdot h$ $S = a^2 \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$	<p><b>ТРАПЕЦІЯ</b></p>  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $S = m \cdot h$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$



Таблиця 66. **ДОВЖИНА КОЛА ТА ПЛОЩА КРУГА**

Довжина кола та його частин		
	$C = 2\pi R$ — довжина кола	
		$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi R n}{180}$ — довжина дуги, яка відповідає центральному куту в $n$ градусів
		$l = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R \cdot \alpha$ — довжина дуги, яка відповідає центральному куту в $\alpha$ радіан
Площа круга та його частини		
КРУГ	СЕКТОР	
		
$S = \pi R^2$	Площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в $n$ градусів  $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$	Площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в $\alpha$ радіан:  $S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{R^2 \alpha}{2}$
СЕГМЕНТ		
		$S_{\text{кругового сегмента}} = S_{\text{кругового сектора}} \mp S_{\Delta AOB}$  (при $\alpha < 180^\circ$ знак «-», при $\alpha > 180^\circ$ знак «+»)

Закінчення таблиці 66

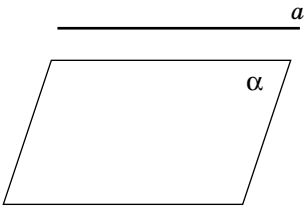
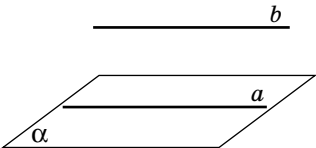
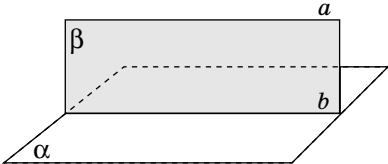
Взаємне розміщення прямої та кола		
$(D — \text{ВІДСТАНЬ ВІД ЦЕНТРА КОЛА ДО ПРЯМОЇ}; r — \text{РАДІУС КОЛА})$		
<p>Спільних точок немає</p>  <p><math>d &gt; r</math></p>	<p>Одна спільна точка</p>  <p><math>d = r</math> Пряма <math>AB</math> — дотична</p>	<p>Дві спільні точки</p>  <p><math>d &lt; r</math> Пряма <math>AB</math> перетинає коло</p>
Взаємне розміщення двох кіл		
$(O_1O_2 = d — \text{ВІДСТАНЬ МІЖ ЦЕНТРАМИ КІЛ}; r_1 \text{ і } r_2 — \text{РАДІУСИ КІЛ}, r_1 > r_2)$		
<p>Спільних точок немає</p>  <p><math>d &gt; r_1 + r_2</math></p>	<p>Одна спільна точка (<math>M</math>)</p>  <p><math>d = r_1 + r_2</math> — зовнішній дотик</p>	<p>Дві спільні точки</p>  <p><math>r_1 - r_2 &lt; d &lt; r_1 + r_2</math> <math>KN \perp O_1O_2</math> <math>KT = TN</math></p>
 <p><math>d &lt; r_1 - r_2</math></p>	 <p><math>d = r_1 - r_2</math> — внутрішній дотик</p>	

СТЕРЕОМЕТРІЯ

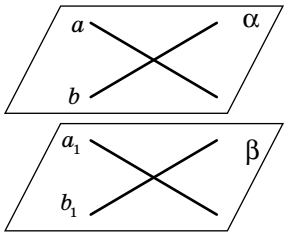
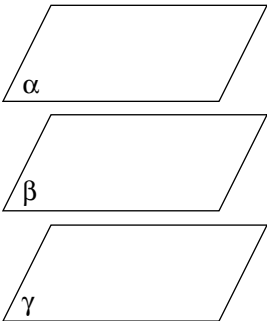
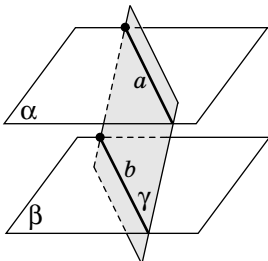
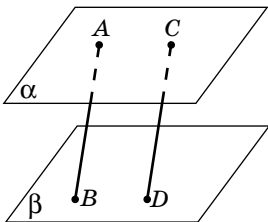
Таблиця 67. **ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ**

Аксиоми стереометрії та наслідки з них	
<p>A diagram showing a shaded parallelogram representing a plane labeled <math>\alpha</math>. A point <math>A</math> is marked inside the plane, and a point <math>M</math> is marked outside it.</p>	<p>1. Якою б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй</p> $A \in \alpha, M \notin \alpha$
<p>A diagram showing two planes, <math>\alpha</math> and <math>\beta</math>, intersecting at a point <math>A</math>. Plane <math>\alpha</math> is shown as a vertical rectangle, and plane <math>\beta</math> is shown as a horizontal rectangle.</p>	<p>2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку</p>
<p>A diagram showing a parallelogram representing a plane labeled <math>\alpha</math>. Three points <math>A</math>, <math>B</math>, and <math>C</math> are marked inside the plane, forming a triangle.</p>	<p>3. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну</p>
<p>A diagram showing a parallelogram representing a plane labeled <math>\alpha</math>. A line segment with endpoints <math>A</math> and <math>B</math> is drawn inside the plane.</p>	<p>4. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині</p>
<p>A diagram showing a parallelogram representing a plane labeled <math>\alpha</math>. Two lines, <math>a</math> and <math>b</math>, intersect at point <math>A</math> inside the plane.</p>	<p>5. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну</p>
<p>A diagram showing a parallelogram representing a plane labeled <math>\alpha</math>. A line segment with endpoints <math>B</math> and <math>C</math> is drawn inside the plane. A point <math>A</math> is marked inside the plane, not on the line <math>BC</math>.</p>	<p>6. Через пряму та точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну</p>

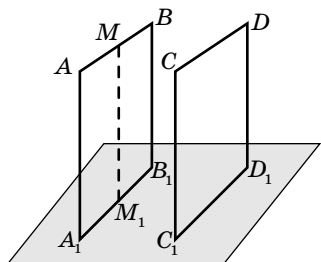
Закінчення таблиці 67

Паралельність прямої та площини		
	$a \parallel \alpha$	<p>Пряма та площина називаються паралельними, якщо вони не перетинаються</p>
ОЗНАКА	ВЛАСТИВІСТЬ	
<p>Якщо <math>b \parallel a</math> (<math>a</math> лежить у площині <math>\alpha</math>), то <math>b \parallel \alpha</math></p> 	<p>Якщо <math>a \parallel \alpha</math>, <math>\beta</math> проходить через <math>a</math>, <math>\beta</math> перетинає <math>\alpha</math> по <math>b</math>, то <math>a \parallel b</math></p> 	

Таблиця 68. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ

Паралельність площин		
	ОЗНАЧЕННЯ	ОЗНАКА
	<p>Дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються</p> $\alpha \parallel \beta$	<p>Якщо <math>a \parallel a_1, b \parallel b_1</math> (<math>a</math> і <math>b</math> лежать в <math>\alpha</math>, <math>a_1</math> і <math>b_1</math> лежать в <math>\beta</math>), то <math>\alpha \parallel \beta</math>.</p> <p>Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні</p>
ВЛАСТИВІСТІ		
 <p>Якщо <math>\beta \parallel \alpha</math> і <math>\gamma \parallel \alpha</math>, то <math>\beta \parallel \gamma</math></p>	 <p>Якщо <math>\alpha \parallel \beta</math> і <math>\gamma</math> перетинає <math>\alpha</math> по <math>a</math>, <math>\gamma</math> перетинає <math>\beta</math> по <math>b</math>, то <math>a \parallel b</math></p>	 <p>Якщо <math>AB \parallel CD</math> і <math>\alpha \parallel \beta</math> (<math>A \in \alpha, C \in \alpha, B \in \beta, D \in \beta</math>), то <math>AB = CD</math></p>

**Зображення просторових фігур на площині**



$AA_1 \parallel BB_1$ . Пряма  $AA_1$  перетинає  $\alpha$  в точці  $A_1$ .  
Точка  $A$  проектується в точку  $A_1$  на площині  $\alpha$ :  $A \rightarrow A_1$ .  
Аналогічно  $B \rightarrow B_1$ ,  $AB \rightarrow A_1B_1$ .

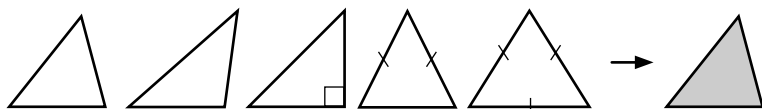
**Відрізок проектується у відрізок**

Якщо  $AB \parallel CD$  ( $AB \rightarrow A_1B_1$ ;  $CD \rightarrow C_1D_1$ ), то  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$   
(або збігаються)

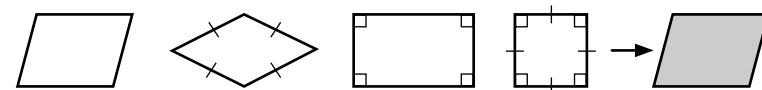
$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1}$$

Наслідок. Якщо  $M$  — середина  $AB$ ,  $AB \rightarrow A_1B_1$ ,  $M \rightarrow M_1$ ,  
то  $M_1$  — середина  $A_1B_1$

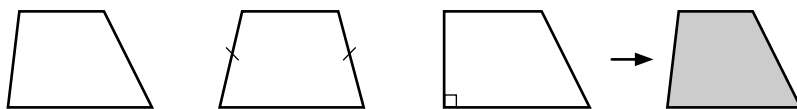
**Паралельні проєкції деяких плоских фігур**



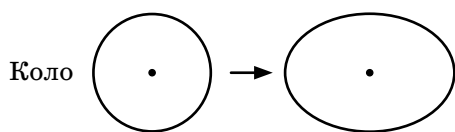
Проекція — *трикутник*  
будь-якої форми



Проекція — *паралелограм*  
будь-якої форми



Проекція — *трапеція*  
будь-якої форми

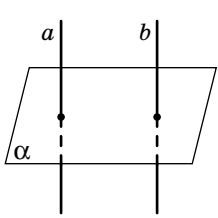
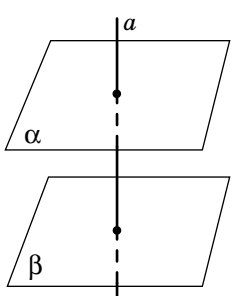


Коло  $\rightarrow$  Проекція — *еліпс*

Таблиця 69. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ У ПРОСТОРИ

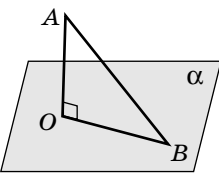
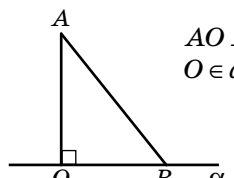
Перпендикулярність прямої та площини	
ОЗНАЧЕННЯ	ОЗНАКА
<p><math>a \perp \alpha \Leftrightarrow a \perp x</math> <math>x</math> — будь-яка пряма площини <math>\alpha</math> <math>a \perp x_1</math></p>	<p>Якщо <math>a \perp b</math> і <math>a \perp c</math> (<math>b</math> і <math>c</math> лежать у площині <math>\alpha</math> і перетинаються), то <math>a \perp \alpha</math></p>

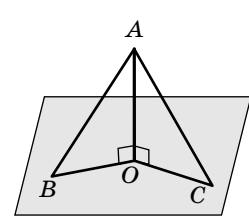
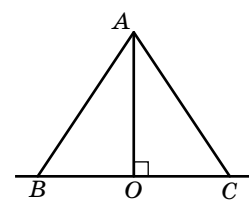
Продовження таблиці 69

Властивості	
 <p>Якщо <math>a \parallel b</math> і <math>\alpha \perp a</math>, то <math>\alpha \perp b</math></p> <p>Якщо <math>a \perp \alpha</math> і <math>b \perp \alpha</math>, то <math>a \parallel b</math></p>	<p>Якщо <math>\alpha \parallel \beta</math> і <math>a \perp \alpha</math>, то <math>a \perp \beta</math></p> <p>Якщо <math>\alpha \perp a</math> і <math>\beta \perp a</math>, то <math>\alpha \parallel \beta</math></p> 

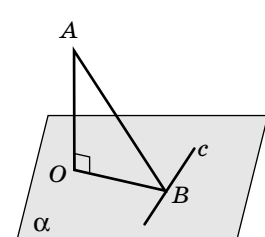
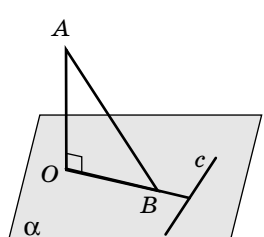
**Перпендикуляр і похила**

У ПРОСТОРІ	НА ПЛОЩИНІ
------------	------------

 <p><math>AO \perp \alpha</math> <math>O \in \alpha</math></p> <p><b>AO — перпендикуляр</b></p> <p>AO — відстань від точки A до площини <math>\alpha</math></p> <p>OB — проекція похилої AB на площину <math>\alpha</math></p>	 <p><math>AO \perp a</math> <math>O \in a</math></p> <p><b>AO — перпендикуляр</b></p> <p>AO — відстань від точки A до прямої a</p> <p>OB — проекція похилої AB на пряму a</p>
---	--

	<p><b>AB — похила</b></p> <p><math>AO &lt; AB</math> (перпендикуляр є коротшим за похилу)</p> <p><math>AB = AC \Leftrightarrow BO = OC</math></p> <p><math>AB &gt; AC \Leftrightarrow BO &gt; OC</math></p>	
---	---	---

**Теорема про три перпендикуляри**

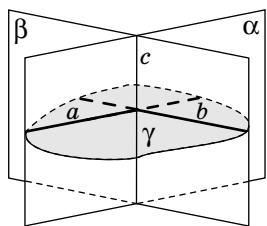
	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; display: inline-block;"> <p>OB — проекція AB на площину <math>\alpha</math>; c — пряма на площині <math>\alpha</math> <math>OB \perp c</math></p> </div> <p><math>\Leftrightarrow AB \perp c</math></p>	
---	---	---

Перпендикулярність двох площин	
	$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ $\alpha$ перетинає $\beta$ по прямій $c$ , $\gamma \perp c$ $\gamma$ перетинає $\alpha$ по прямій $a$ , $\gamma$ перетинає $\beta$ по прямій $b$ , $a \perp b$
ОЗНАКА	ВЛАСТИВІСТЬ
<p>Якщо <math>b \perp \alpha</math> і <math>\beta</math> проходить через <math>b</math>, то <math>\beta \perp \alpha</math></p>	<p>Якщо <math>\beta \perp \alpha</math>, <math>\beta</math> перетинає <math>\alpha</math> по <math>a</math> і <math>b \perp a</math> (<math>b</math> лежить у <math>\beta</math>), то <math>b \perp \alpha</math></p>

Таблиця 70. КУТИ У ПРОСТОРИ

Кут між прямою і площиною	
<p><math>BO</math> — проекція <math>AB</math> на площину <math>\alpha</math>, <math>AO \perp \alpha</math>;  <math>\angle ABO</math> — кут між прямою <math>AB</math> і площиною <math>\alpha</math></p>	ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ
<p><math>a \parallel \alpha</math>  <math>a</math> лежить в <math>\alpha</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \angle(a, \alpha) = 0^\circ</math></p>	<p><math>a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a, \alpha) = 90^\circ</math></p>
Кут між мимобіжними прямими	
	<p><math>a \parallel a_1; b \parallel b_1</math>  <math>\angle(a, b) = \angle(a_1, b_1) = \varphi</math>          (<math>\varphi</math> — менший із суміжних кутів)  <math>0^\circ &lt; \angle(a, b) &lt; 90^\circ</math></p>

**Кут між площинами**



$$0^\circ < \angle(\alpha, \beta) < 90^\circ$$

$\alpha$  перетинає  $\beta$  по прямій  $c$ .  
Проведемо площину  $\gamma \perp c$ .

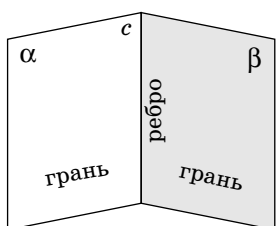
**Кутом між площинами  $\alpha$  і  $\beta$** , що перетинаються, називається **кут між прямими**, по яких площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$ .

$$\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$$



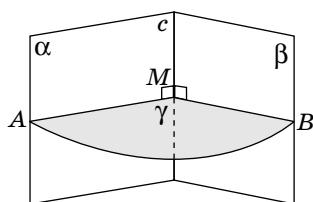
$$\begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ \alpha = \beta \end{matrix} \Leftrightarrow \angle(\alpha, \beta) = 0^\circ$$

**Двогранний кут (кут між півплощинами)**



**Двогранним кутом** називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує

**Лінійний кут двогранного кута**



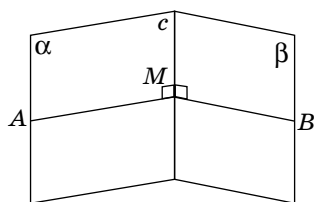
$\angle AMB$  — лінійний кут

( $\gamma \perp c$ ,  $\gamma$  перетинає  $\alpha$  по променю  $MA$ ,  
 $\gamma$  перетинає  $\beta$  по променю  $MB$ )

**ВЛАСТИВІСТЬ**

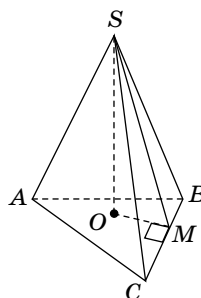
Площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута

**ПРАКТИЧНІ СПОСОБИ ПОБУДОВИ ЛІНІЙНОГО КУТА**



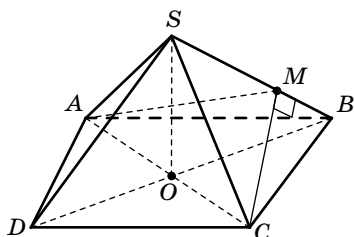
$M \in c$ ,  
 $MA \perp c$  (у грані  $\alpha$ ),  
 $MB \perp c$  (у грані  $\beta$ )

$\angle AMB$  — лінійний



$SO \perp$  пл.  $ABC$ ,  
 $OM \perp BC$ .  
Тоді  $SM \perp BC$

$\angle SMO$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $BC$



$SABCD$  — правильна піраміда.

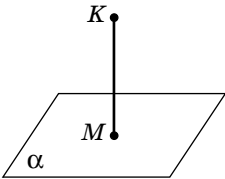
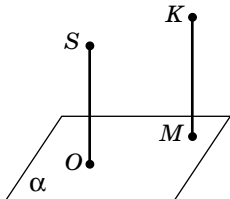
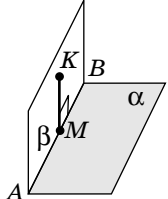
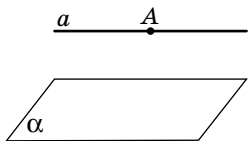
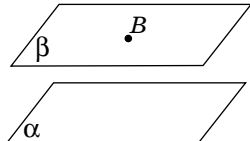
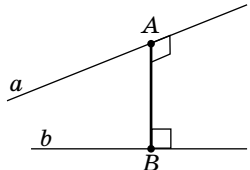
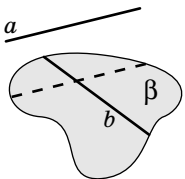
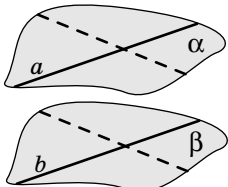
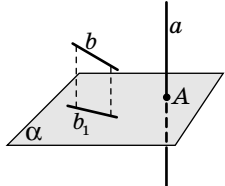
Проводимо  $CM \perp SB$  і з'єднуємо точки  $A$  і  $M$ .

Тоді  $\triangle AMB = \triangle CMB$ , отже,  $\angle AMB = \angle CMB = 90^\circ$ ,

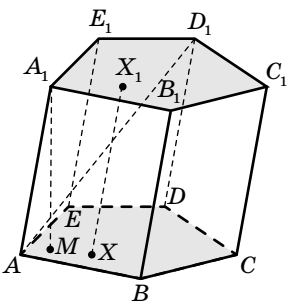
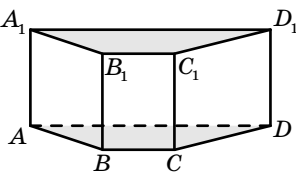
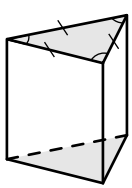
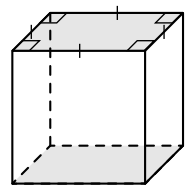
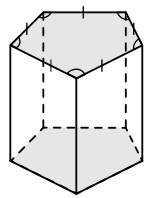
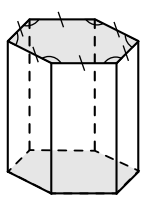
тобто  $AM \perp SB$  і  $\angle AMC$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $SB$



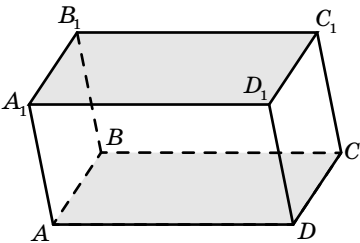
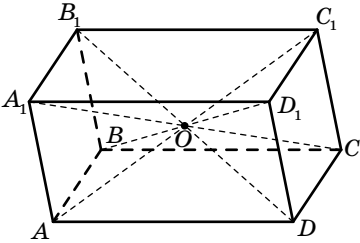
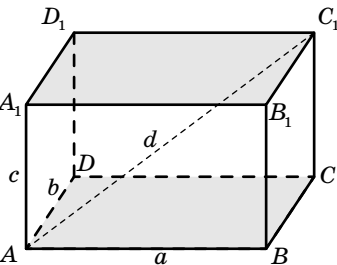
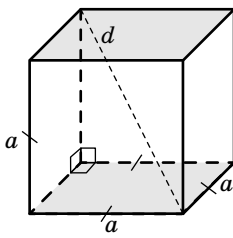
Таблиця 71. **ВІДСТАНІ У ПРОСТОРИ (способи, які використовуються для їх обчислення)**

Відстань від точки до площини ( $\rho$ — відстань)		
<p>Проводимо <math>KM \perp \alpha</math> (<math>M \in \alpha</math>)</p>  <p><math>KM = \rho(K; \alpha)</math></p>	<p><math>SO \perp \alpha</math>. Проводимо <math>KM \parallel SO</math>. Тоді <math>KM \perp \alpha</math></p>  <p><math>KM = \rho(K; \alpha)</math></p>	<p>Проводимо через точку <math>K</math> площину <math>\beta \perp \alpha</math> (<math>\beta</math> перетинає <math>\alpha</math> по <math>AB</math>). Проводимо <math>KM \perp AB</math>. Тоді <math>KM \perp \alpha</math></p>  <p><math>KM = \rho(K; \alpha)</math></p>
Відстань ( $\rho$ ) між паралельними прямою і площиною		Відстань ( $\rho$ ) між паралельними площинами
 <p><math>a \parallel \alpha, A \in \alpha</math> <math>\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)</math></p>		 <p><math>\beta \parallel \alpha, B \in \beta</math> <math>\rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha)</math></p>
Відстань ( $\rho$ ) між мимобіжними прямими		
	<p>Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра</p> <p><math>AB \perp a, AB \perp b</math> <math>\rho(a; b) = AB</math></p> <p><b>Прямі <math>a</math> і <math>b</math> — мимобіжні</b></p>	
Способи обчислення відстані ( $\rho$ ) між мимобіжними прямими		
<p>Проводимо через пряму <math>b</math> площину <math>\beta \parallel a</math></p>  <p><math>\rho(a; b) = \rho(a; \beta)</math></p>	<p>Проводимо через прямі <math>a</math> і <math>b</math> паралельні площини <math>\alpha \parallel \beta</math></p>  <p><math>\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)</math></p>	<p>Проводимо площину <math>\alpha \perp a</math> і проєкуємо прямі <math>a</math> і <math>b</math> на цю площину: <math>a \rightarrow A, b \rightarrow b_1</math></p>  <p><math>\rho(a; b) = \rho(A; b_1)</math></p>

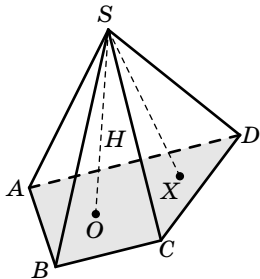
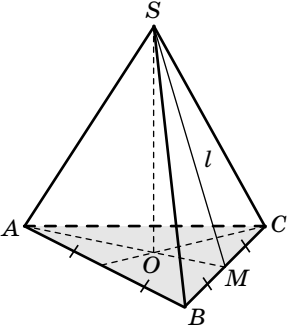
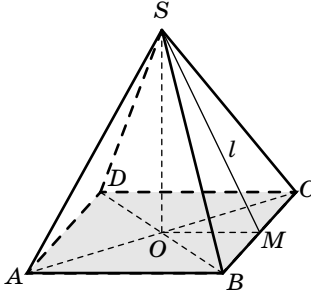
Таблиця 72. ПРИЗМА

Довільна призма	
	<p>Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских багатокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих багатокутників</p> <p><math>ABCDE</math> і <math>A_1B_1C_1D_1E_1</math> — основи призми;  <math>AA_1, BB_1, \dots</math> — бічні ребра;  <math>ABB_1A_1, BCC_1B_1, \dots</math> — бічні грані;</p> <p><math>AD_1</math> — діагональ призми — сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані.</p> <p>Висота призми — відстань між площинами її основ:  <math>A_1M \perp \text{пл. } ABCDE; A_1M = H</math> — висота</p>
<p>1. Основи призми рівні:  <math>ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1</math></p> <p>2. Основи призми лежать у паралельних площинах:              пл. <math>ABCDE \parallel</math> пл. <math>A_1B_1C_1D_1E_1</math></p> <p>3. Бічні ребра призми паралельні й рівні:  <math>AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \dots, AA_1 = BB_1 = CC_1 \dots</math></p>	<p>4. Бічні грані призми — паралелограми:  <math>ABB_1A_1</math> — паралелограм;  <math>BCC_1B_1</math> — паралелограм, ...</p> <p>5. <math>V_{\text{призми}} = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{призми}}</math></p> <p>6. <math>S_{\text{біч}} = P_{\text{перп.перерізу}} \cdot AA_1</math>  <math>(S_{\text{біч}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + \dots + S_{AEE_1A_1})</math></p> <p>7. <math>S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}</math></p>
Пряма призма	
	<p>Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ</p> <p><math>AA_1 \perp \text{пл. } ABCD, BB_1 \perp \text{пл. } ABCD \dots</math></p>
<p>1. Висота прямої призми дорівнює бічному ребру: <math>H_{\text{прямої призми}} = AA_1 = BB_1 \dots</math></p> <p>2. Бічні грані прямої призми — прямокутники:  <math>ABB_1A_1</math> — прямокутник;  <math>BCC_1B_1</math> — прямокутник, ...</p>	<p>3. <math>V_{\text{прямої призми}} = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1</math></p> <p>4. <math>S_{\text{біч}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1</math></p> <p>5. <math>S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}</math></p>
ПРАВИЛЬНА ПРИЗМА	
<p>Пряма призма називається правильною, якщо її основи є правильними багатокутниками</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Трикутна</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Чотирикутна</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>П'ятикутна</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Шестикутна</p> </div> </div>

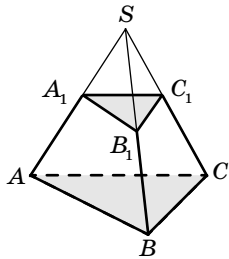
Таблиця 73. ПАРАЛЕЛЕПЕД

Довільний паралелепіпед	
	<p><b>Паралелепіпедом називається призма, в основі якої лежить паралелограм</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>У паралелепіпеда всі грані — паралелограми.</li> <li>У паралелепіпеда протилежні грані паралельні й рівні.</li> <li>Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл</li> </ol> <p style="text-align: center;"><math>O</math> — середина діагоналей <math>A_1C</math>, <math>BD_1</math>, <math>AC_1</math>, <math>B_1D</math></p>
	
Прямокутний паралелепіпед	
	<p><b>Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається прямокутним паралелепіпедом</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>У прямокутного паралелепіпеда всі грані — прямокутники</li> <li> <math display="block">d^2 = a^2 + b^2 + c^2</math> <math display="block">AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2</math> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"></div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів</p> </div> </div> </li> <li><math>V_{\text{прямокут. паралелеп}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = abc</math></li> <li><math>S_{\text{біч}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a + b)c</math></li> <li><math>S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}</math></li> </ol>
Куб	
	<p><b>Кубом називається прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>У куба всі грані — квадрати</li> <li> <math display="block">d = a\sqrt{3}</math> <p>(<math>d</math> — діагональ куба, <math>d^2 = a^2 + a^2 + a^2</math>, де <math>a</math> — ребро куба)</p> </li> <li><math>V_{\text{куба}} = a^3</math></li> <li> <math display="block">S_{\text{біч. куба}} = 4a^2 \quad S_{\text{повна}} = 6a^2</math> </li> </ol>

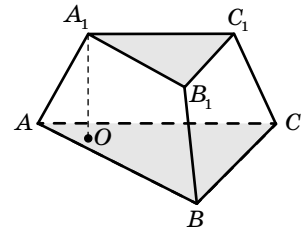
Таблиця 74. ПІРАМІДА

Довільна піраміда		
	<p>Пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника (основи піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи</p> <p><math>ABCD</math> — основа піраміди; <math>SA, SB, SC, SD</math> — бічні ребра;  <math>\triangle ASB, \triangle BSC, \triangle CSD, \triangle ASD</math> — бічні грані;</p> <p><math>SO</math> — висота піраміди, <math>SO \perp</math> пл. <math>ABCD</math>, <math>SO = H</math>,</p> <p><math>S_{\text{біч. пір}} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle BSC} + S_{\triangle CSD} + S_{\triangle ASD}</math></p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}</math> </div>
Правильна піраміда		
ТРИКУТНА		ЧОТИРИКУТНА
<div style="text-align: center;">  </div> <p><math>\triangle ABC</math> — правильний  <math>O</math> — точка перетину медіан (висот і бісектрис), центр вписаного й описаного кіл</p>	<p>Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника</p> <p><math>SO</math> — висота правильної піраміди (<math>SO \perp</math> пл. <math>ABC</math>; <math>O</math> — центр основи)</p> <p><math>SM</math> — апофема правильної піраміди (<math>SO \perp BC</math>) (висота бічної грані)</p> <p>1. У правильній піраміді бічні ребра рівні й однаково нахилені до площини основи:  <math>SA = SB = SC = \dots</math>  <math>\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \dots</math></p> <p>2. Бічні грані правильної піраміди — рівні між собою рівнобедрені трикутники, однаково нахилені до основи.</p> <p>3. <math>S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SM = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l</math>, де <math>l</math> — апофема.</p> <p>4. <math>S_{\text{біч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}</math>, де <math>\varphi = \angle SMO</math> — кут нахилу всіх бічних граней до основи;  <math>S_{\text{біч}} = S_{\text{біч. грані}} \cdot n</math>, де <math>n</math> — кількість граней.</p> <p>5. <math>S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}</math></p> <p>6. <math>V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H</math></p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p><math>ABCD</math> — квадрат  <math>O</math> — точка перетину діагоналей</p>

**Зрізана піраміда**



Якщо задано піраміду  $SABC$  і проведено площину  $A_1B_1C_1$ , паралельну основі піраміди (пл.  $A_1B_1C_1 \parallel$  пл.  $ABC$ ), то ця площина відтинає від заданої піраміди піраміду  $SA_1B_1C_1$ , подібну до даної (з коефіцієнтом подібності  $k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$ ).



Друга частина заданої піраміди — многогранник  $ABCA_1B_1C_1$  — називається **зрізаною пірамідою**.

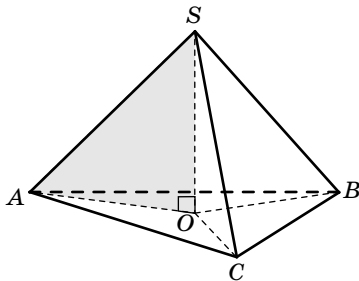
Грані  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  — основи (пл.  $ABC \parallel$  пл.  $A_1B_1C_1$ ), трапеції  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $ACC_1A_1$  — бічні грані.

**Висотою зрізаної піраміди називається відстань між площинами її основ**

$$A_1O \perp \text{пл. } ABC, \quad A_1O = H \text{ — висота}$$

$$V_{\text{зріз. піраміди}} = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}), \text{ де } S_1, S_2 \text{ — площі основ}$$

**Положення висоти в деяких видах пірамід**



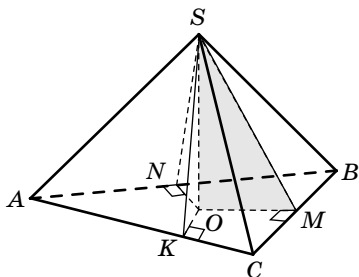
Якщо **всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під одним кутом до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди,**

то **основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи** (і навпаки).

Для розв'язування використовують прямокутний  $\triangle SOA$ , у якому:

$$SO \perp AO, \quad AO = r_{\text{кола, опис. навк. основи}},$$

$\angle SAO$  — кут нахилу бічного ребра  $SA$  до площини основи



Якщо **всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи,** то **основаю висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу** (і навпаки).

Для розв'язування використовують прямокутний  $\triangle SOM$ , у якому:

$$SO \perp OM, \quad OM = r_{\text{кола, впис. в основу}} \quad (OM \perp BC),$$

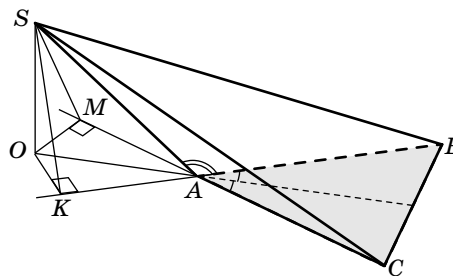
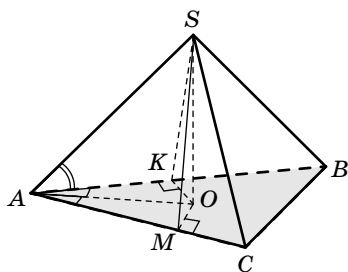
$\angle SMO$  — кут нахилу бічної грані  $SBC$  до основи

( $\angle SMO$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $BC$ ).

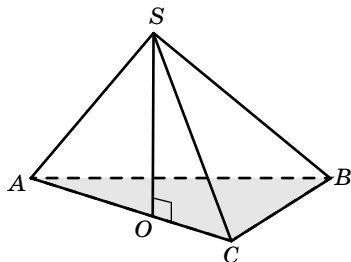
Для такого виду пірамід виконується формула

$$S_{\text{біч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi},$$

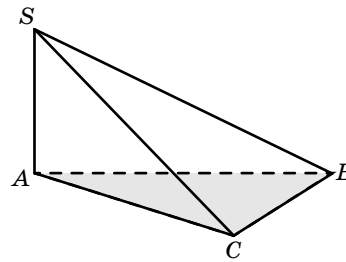
де  $\varphi = \angle SMO$  — кут нахилу всіх бічних граней до основи



Якщо *лише дві бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основи,*  
 то *це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними з цим ребром сторонами основи (і навпаки)*



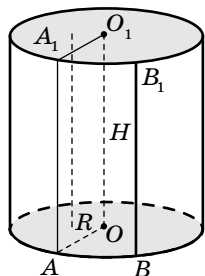
Якщо *лише одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи,*  
 то *висотою піраміди буде висота цієї грані*



Якщо *дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,*  
 то *висотою піраміди буде їх спільне бічне ребро*

Таблиця 75. ЦИЛІНДР ТА ДЕЯКІ ЙОГО ПЕРЕРІЗИ

Циліндр



Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кіл, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих кіл

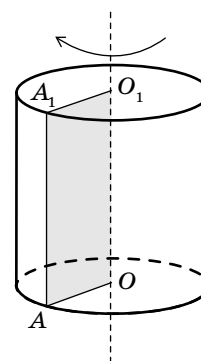
*Круги — основи циліндра*

Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — *твірні*:

$AA_1, BB_1$  — твірні циліндра

Циліндр називається *прямим*, якщо його *твірні перпендикулярні до площин основ.*

У шкільних підручниках: *циліндр = прямий круговий циліндр*



1. Основи циліндра рівні й паралельні:

$OA = O_1A_1 = R$ ; пл.  $AOB \parallel$  пл.  $A_1O_1B_1$ , де  $O$  — центр нижньої основи циліндра;  
 $O_1$  — центр верхньої основи

2. Твірні циліндра паралельні й рівні:  $AA_1 \parallel BB_1$ ,  $AA_1 = BB_1$

3. Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює твірній:  $H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1$

4. При обертанні прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр:

$OAA_1O_1$  — прямокутник;  $OO_1$  — вісь утвореного циліндра;

$R_{\text{утв.цил}} = OA = O_1A_1$ ,  $H_{\text{цил}} = OO_1 = AA_1$

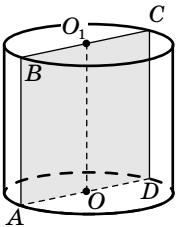
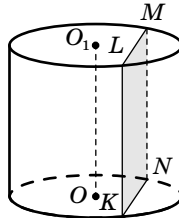
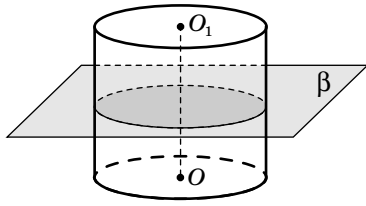
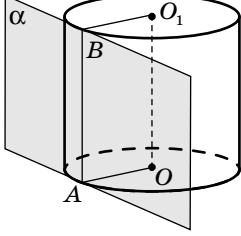
5.  $S_{\text{осн.цил}} = \pi R^2$

$S_{\text{біч.цил}} = 2\pi RH$

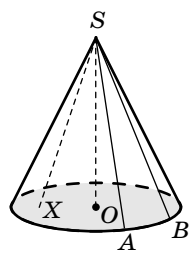
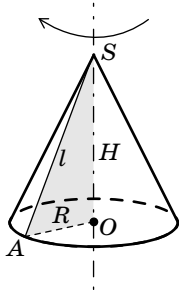
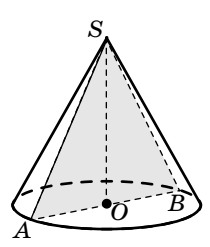
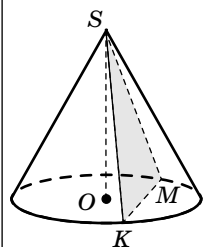
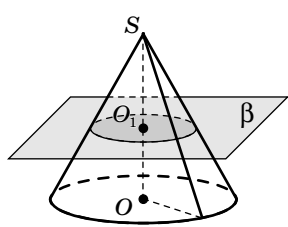
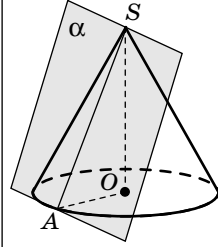
$S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R(H + R)$

6.  $V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$

**Перерізи циліндра площинами**

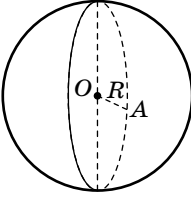
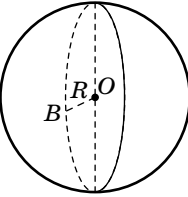
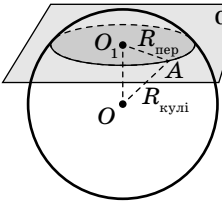
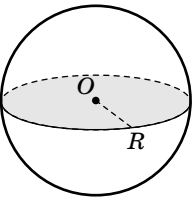
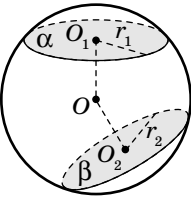
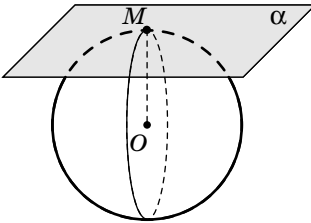
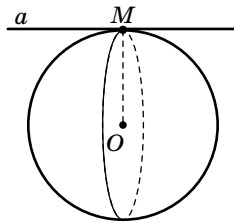
ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ ЦИЛІНДРА	ПЕРЕРІЗ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЮ ЙОГО ОСІ
 <p><math>ABCD</math> — осьовий переріз — проходить через вісь <math>OO_1</math>;  <math>ABCD</math> — прямокутник  <math>AD = d_{\text{осн}} = 2R</math>, <math>AB = H_{\text{цил}}</math>  <math>AB</math> і <math>CD</math> — твірні циліндра</p>	 <p>пл. <math>KLMN \parallel OO_1</math>;  <math>KLMN</math> — прямокутник;  <math>KL</math> і <math>MN</math> — твірні циліндра  <math>KL = H_{\text{цил}}</math></p>
ПЕРЕРІЗ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЮ ЙОГО ОСНОВАМ	ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ДО ЦИЛІНДРА
 <p><math>R_{\text{пер}} = R_{\text{осн.цил}}</math></p> <p>Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи</p>	 <p><math>\alpha</math> — дотична площина до циліндра;  <math>AB</math> — твірна;  <math>\alpha</math> проходить через <math>AB</math>,  <math>\alpha \perp</math> пл. <math>AOO_1B_1</math></p> <p>Дотичною площиною до циліндра називається площина, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну</p>

Таблиця 76. **КОНУС ТА ДЕЯКІ ЙОГО ПЕРЕРІЗИ**

Конус	
	<p>Конусом (круговим конусом) називається тіло, що складається з круга, точки, яка не лежить у площині цього круга, і всіх відрізків, що сполучають задану точку з точками круга</p> <p style="text-align: center;"><i>Круг — основа конуса</i></p> <p>Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, — <i>твірні</i>: <math>SA, SB</math> — твірні конуса</p> <p>Конус називається <i>прямим</i>, якщо <math>SO \perp</math> пл. <math>AOB</math> (<math>O</math> — центр круга основи)</p> <p style="text-align: center;"><i>У шкільних підручниках: конус = прямий круговий конус</i></p>
	
<p>1. Твірні конуса рівні: <math>SA = SB = \dots</math></p> <p>2. <math>H_{\text{конуса}} = SO</math> (<math>SO \perp</math> пл. <math>AOB</math>)</p> <p>3. При обертанні прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус:  <math>\triangle AOS</math> прямокутний, <math>\angle AOS = 90^\circ</math>, пряма <math>SO</math> — вісь конуса,  <math>R_{\text{осн. конуса}} = AO</math>, <math>H_{\text{конуса}} = SO</math>, <math>AS</math> — твірна, <math>AS = l</math></p> <p>4. <math>S_{\text{осн. конуса}} = \pi R^2</math>                      <math>S_{\text{біч. конуса}} = \pi Rl</math>                      <math>S_{\text{повна}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}} = \pi R(l + R)</math></p> <p>5. <math>V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H</math></p>	
Перерізи конуса площинами	
<p><b>ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ КОНУСА</b></p>	<p><b>ПЕРЕРІЗ КОНУСА ПЛОЩИНОЮ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ЙОГО ВЕРШИНУ</b></p>
 <p><math>\triangle SAB</math> — осьовий переріз — проходить через вісь <math>SO</math></p> <p><math>\triangle SAB</math> рівнобедрений,</p> <p><math>SA = SB</math> (<math>SA</math> і <math>SB</math> — твірні)</p>	 <p><math>\triangle SMK</math> рівнобедрений, <math>SM = SK</math> (<math>SM</math> і <math>SK</math> — твірні)</p>
<p><b>ПЕРЕРІЗ КОНУСА ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЮ ЙОГО ОСНОВІ</b></p>	<p><b>ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ДО КОНУСА</b></p>
 $\frac{R_{\text{пер}}}{R_{\text{осн. конуса}}} = \frac{SO_1}{SO}$ <p><i>Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по колу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса</i></p>	 <p><math>\alpha</math> — дотична площина до конуса; <math>SA</math> — твірна; <math>\alpha</math> проходить через <math>SA</math>; <math>\alpha \perp</math> пл. <math>SOA</math></p> <p><i>Дотичною площиною до конуса називається площина, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну</i></p>

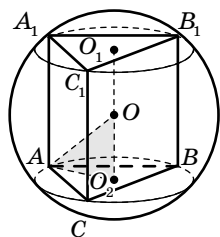


Таблиця 77. СФЕРА ТА КУЛЯ

Сфера	Куля
 <p><math>O</math> — центр сфери;  <math>OA</math> — радіус сфери, <math>OA = R</math></p> $S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2$ <p>При обертанні півкола навколо його діаметра одержуємо <i>сферу</i>.</p> <p><b>Сферою</b> називається поверхня, яка складається з усіх точок простору, що розташовані на даній відстані (<math>R</math>) від даної точки (<math>O</math>)</p>	 <p><math>O</math> — центр кулі;  <math>OB</math> — радіус кулі, <math>OB = R</math></p> $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ <p>При обертанні півкруга навколо його діаметра одержуємо <i>кулю</i>.</p> <p><b>Кулею</b> називається тіло, що складається з усіх точок простору, що розташовані на відстані, не більшій за дану (<math>R</math>), від даної точки (<math>O</math>)</p>
Переріз кулі площинами	
ПЕРЕРІЗ КУЛІ ОДНІЄЮ ПЛОЩИНОЮ	ПЕРЕРІЗ КУЛІ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ
 <p>Будь-який переріз кулі площиною є <i>кругом</i>.          Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину</p> <p><math>O</math> — центр кулі; <math>O_1</math> — центр круга перерізу; <math>OO_1 \perp \alpha</math>.</p> <p>Із <math>\triangle OO_1A</math>:</p> $AO_1 = R_{\text{пер}} = \sqrt{R_{\text{кулі}}^2 - OO_1^2}$ <p>Переріз, що проходить через центр кулі, — <i>великий круг</i></p> $R_{\text{вел. круга}} = R_{\text{кулі}}$ 	<p><math>OO_1 \perp \alpha</math>  <math>OO_2 \perp \beta</math></p> <p><math>r_1</math> і <math>r_2</math> — радіуси кругів перерізів</p>  $OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ $OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$ $OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$
Дотичні площина і пряма до кулі (сфери)	
 <p>Дотична площина має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку</p> <p><math>\alpha</math> — дотична площина;  <math>M</math> — точка дотику</p> $\Leftrightarrow OM \perp \alpha$ <p>(<math>OM</math> — радіус кулі)</p>	 <p>Дотична пряма має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку</p> <p><math>a</math> — дотична пряма;  <math>M</math> — точка дотику</p> $\Leftrightarrow OM \perp a$ <p>(<math>OM</math> — радіус кулі)</p>
<p>Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику, і навпаки: якщо площина (пряма) проходить через точку кулі (сфери) і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до кулі (сфери)</p>	

Таблиця 78. **ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ПРИЗМИ**

**Куля, описана навколо призми**



Куля називається описаною навколо призми, якщо всі вершини призми лежать на поверхні кулі

$O$  — центр описаної кулі,  $OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$

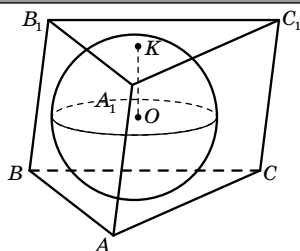
1. Кулю можна описати тільки навколо такої прямої призми, навколо основи якої можна описати коло
2. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить на середині відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми

Якщо в призмі  $ABCA_1B_1C_1$ :  $O_2$  — центр кола, описаного навколо основи  $ABC$ ;  $O_1$  — центр кола, описаного навколо основи  $A_1B_1C_1$ ;  $O$  — середина відрізка  $O_1O_2$ , то  $O$  — центр описаної кулі ( $OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$ ).

$$AO = R_{\text{опис. кулі}} \quad AO_2 = R_{\text{кола, опис. навк. основи}}$$

$$OO_2 = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} H_{\text{призми}}$$

**Куля, вписана в призму**



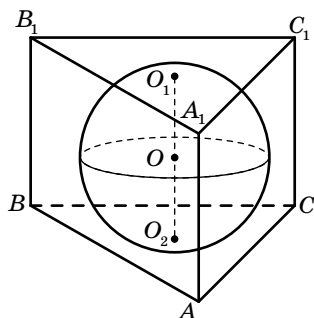
Куля називається вписаною в призму, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі

$O$  — центр вписаної кулі;

$K$  — точка дотику до грані  $A_1B_1C_1$

$$OK = r_{\text{впис. кулі}} \quad OK \perp \text{пл. } A_1B_1C_1$$

**КУЛЯ, ВПИСАНА В ПРЯМУ ПРИЗМУ**



Центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить на середині відрізка, який сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

Якщо  $ABCA_1B_1C_1$  — пряма призма і  $O_2$  — центр кола, вписаного в основу  $ABC$ ;  $O_1$  — центр кола, вписаного в основу  $A_1B_1C_1$ ;

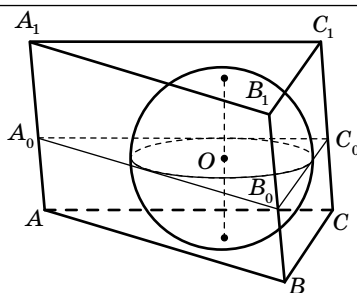
$O$  — середина відрізка  $O_1O_2$ ,

то  $O$  — центр вписаної кулі

$$r_{\text{впис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. в основу}}$$

$$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{призми}}$$

**КУЛЯ, ВПИСАНА В ПОХИЛУ ПРИЗМУ**



Якщо в похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

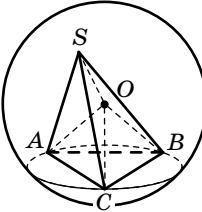
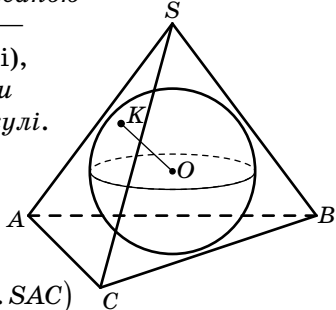
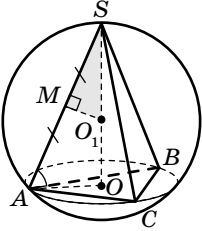
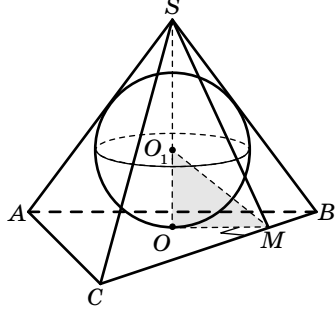
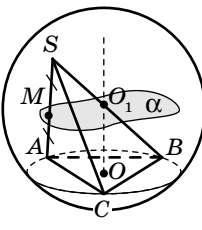
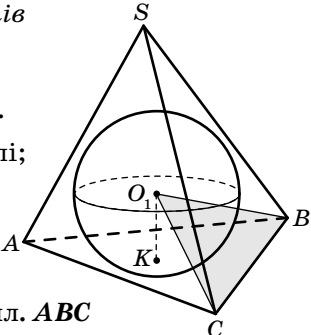
Якщо в призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписано кулю,

$A_0B_0C_0$  — перпендикулярний переріз (пл.  $A_0B_0C_0 \perp AA_1$ ),

то  $r_{\text{впис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. в перп. переріз } A_0B_0C_0}$

$$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{призми}}$$

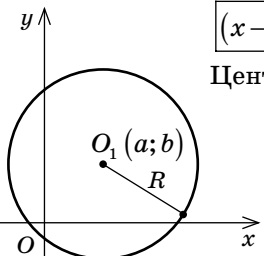
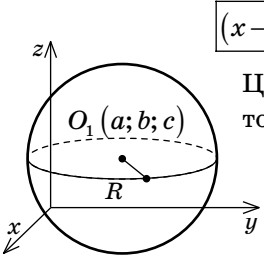
Таблиця 79. **ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ПІРАМІДИ**

Куля, описана навколо піраміди	Куля, вписана в піраміду
 <p><i>Куля називається описаною навколо піраміди (а піраміда — вписаною в кулю), якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.</i></p> <p><math>O</math> — центр описаної кулі  <math>AO = BO = CO = SO = R_{\text{опис. кулі}}</math></p>	<p><i>Куля називається вписаною в піраміду (а піраміда — описаною навколо кулі), якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі.</i></p>  <p><math>O</math> — центр вписаної кулі;  <math>K</math> — точка дотику до грані <math>SAC</math>,  <math>OK = r_{\text{впис. кулі}}</math> (<math>OK \perp \text{пл. } SAC</math>)</p>
ПІРАМІДА, У ЯКОЇ ОСНОВОЮ ВИСОТИ Є ЦЕНТР ОПИСАНОГО НАВКОЛО ОСНОВИ КОЛА	ПІРАМІДА, У ЯКОЇ ОСНОВОЮ ВИСОТИ Є ЦЕНТР ВПИСАНОГО В ОСНОВУ КОЛА
 <p><math>SO</math> — висота піраміди <math>SABC</math>;  <math>O</math> — центр кола, описаного навколо основи піраміди;  <math>M</math> — середина ребра <math>SA</math>;  <math>MO_1 \perp SA</math> (у площині <math>ASO</math>);  <math>MO_1</math> перетинає пряму <math>SO</math> в точці <math>O_1</math>,  <math>O_1</math> — центр описаної кулі</p> <p><math>SO_1 = R_{\text{опис. кулі}}</math>  <math>AO = R_{\text{кола, опис. навк. основи}}</math></p>	<p><math>SO</math> — висота піраміди <math>SABC</math>;  <math>O</math> — центр кола, вписаного в основу;  <math>\angle SMO</math> — лінійний (<math>OM \perp BC, SM \perp BC</math>);  <math>MO_1</math> — бісектриса <math>\angle SMO</math>;  <math>MO_1</math> перетинає <math>SO</math> в точці <math>O_1</math>,  <math>O_1</math> — центр вписаної кулі</p>  <p><math>OO_1 = r_{\text{впис. кулі}}</math>  <math>OM = r_{\text{кола, впис. в основу}}</math></p>
ДОВІЛЬНА ПІРАМІДА	
 <p><math>O</math> — центр кола, описаного навколо основи;  <math>OO_1 \perp \text{пл. } ABC</math>;  <math>M</math> — середина ребра <math>SA</math>;  <math>\alpha \perp SA</math> (<math>M \in \alpha</math>);  <math>\alpha</math> перетинає пряму <math>OO_1</math> у точці <math>O_1</math>,  <math>O_1</math> — центр описаної кулі</p>	<p><i>Центр кулі, вписаної в довільну піраміду, лежить у точці перетину бісекторних площин двограних кутів при ребрах піраміди. Досить розглянути три бісекторні площини.</i></p>  <p><math>O_1</math> — центр описаної кулі;  пл. <math>BCO_1</math> — бісекторна площина двогранного кута при ребрі <math>BC</math></p> <p><math>O_1K \perp \text{пл. } ABC</math>  <math>O_1K = r_{\text{впис. кулі}}</math></p> $r_{\text{впис. кулі}} = \frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\text{повна пір}}}$

КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ

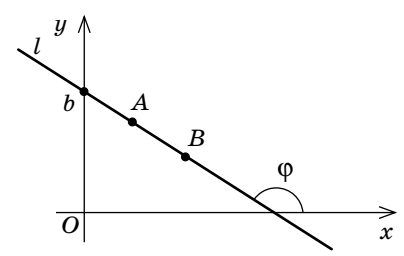
Таблиця 80. **ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ**

Декартові координати	
НА ПЛОЩИНІ	У ПРОСТОРІ
Координати середини відрізка	
<p style="text-align: center;"><math>C</math> — середина <math>AB</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math display="block">x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math display="block">y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}</math> </div>	<p style="text-align: center;"><math>C</math> — середина <math>AB</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math display="block">x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math display="block">y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math display="block">z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}</math> </div>
Відстань між точками	
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math display="block">AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math display="block">AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}</math> </div>
Рівняння кола	Рівняння сфери
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">x^2 + y^2 = R^2</math> </div> <p style="text-align: center;">Центр кола — початок координат</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">x^2 + y^2 + z^2 = R^2</math> </div> <p style="text-align: center;">Центр сфери — початок координат</p>

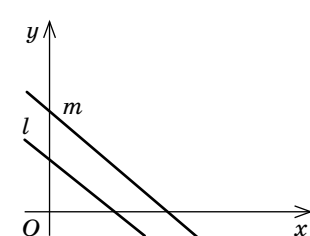
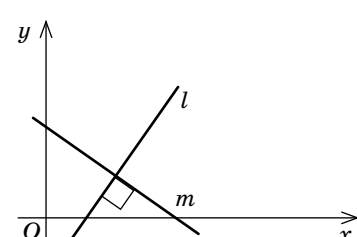
 <div style="margin-top: 10px; border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2</math> </div> <p>Центр кола — точка <math>O_1(a; b)</math></p>	 <div style="margin-top: 10px; border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2</math> </div> <p>Центр сфери — точка <math>O_1(a; b; c)</math></p>
--	---

**Рівняння прямої на площині**

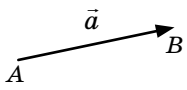
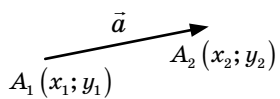
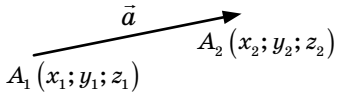
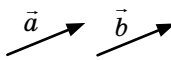
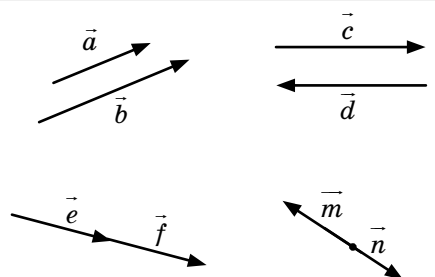
у загальному вигляді:  $ax + by + c = 0$

	<p><b>З кутовим коефіцієнтом (при <math>b \neq 0</math>)</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> <math>y = Kx + b</math> </div> <p>— пряма <math>l</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> <math>K = \text{tg } \varphi</math> </div> <p>— кутовий коефіцієнт</p> <p>Для прямої <math>AB</math>:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>K_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}</math> </div>
---	--

**Умови паралельності й перпендикулярності прямих на площині**

	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> <math>y = k_1x + b_1</math> </div> <p>— пряма <math>l</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> <math>y = k_2x + b_2</math> </div> <p>— пряма <math>m</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}</math> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1</math> </div>

Таблиця 81. **ВЕКТОРИ**

Означення	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"><math>\overline{AB} = \vec{a}</math></div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math> \vec{a}  = AB</math></div> <p><b>Вектором називається напрямлений відрізок</b></p> <p><i>Довжина напрямленого відрізка називається довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора</i></p>
Координати вектора	
НА ПЛОЩИНІ	У ПРОСТОРІ
 <p style="text-align: center;"><math>\vec{a}(a_1; a_2)</math>, де</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"><math>a_1 = x_2 - x_1;</math></div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>a_2 = y_2 - y_1;</math></div> <p><math> \vec{a}  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3)</math>, де</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"><math>a_1 = x_2 - x_1;</math></div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>a_2 = y_2 - y_1;</math></div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>a_3 = z_2 - z_1;</math></div> <p><math> \vec{a}  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}</math></p>
Рівні вектори	
	$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases}  \vec{a}  =  \vec{b} , \\ \text{вектори } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ однаково напрямлені} \end{cases}$
У КООРДИНАТАХ	
$\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2 \end{cases}$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
Колінеарні вектори	
	<p><b>Ненульові вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих</b></p> <p><i>Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені</i></p>
$\vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ колінеарні} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \text{ (відповідні координати пропорційні)}$	

Таблиця 82. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Сума векторів	
НА ПЛОЩИНІ	У ПРОСТОРІ
$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
<p><b>Правило трикутника</b></p> <p><math>\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}</math></p>	<p><b>Правило паралелепіпеда</b></p> <p><math>\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}</math></p>
<p><b>Правило паралелограма</b></p>	
Різниця векторів	
$\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
<p><math>\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}</math></p>	
Множення вектора на число	
$\lambda \cdot (a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2)$	$\lambda \cdot (a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$
<p><math>\overline{AC} = \lambda \overline{AB}</math></p>	<p>При <math>\lambda &gt; 0</math> вектор <math>\lambda \vec{a}</math> і вектор <math>\vec{a}</math> однаково напрямлені.                  При <math>\lambda &lt; 0</math> вектор <math>\lambda \vec{a}</math> і вектор <math>\vec{a}</math> протилежно напрямлені.</p> <p><math> \lambda \vec{a}  =  \lambda  \cdot  \vec{a} </math></p>

Скалярний добуток векторів	
	$\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \cos \varphi$ <p>Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними</p>
У КООРДИНАТАХ	
<p><b>На площині</b></p> $\vec{a}(a_1; a_2); \vec{b}(b_1; b_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	<p><b>У просторі</b></p> $\vec{a}(a_1; a_2; a_3); \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
<p>Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат</p>	
	<p>При <math>\vec{a} \neq \vec{0}</math> і <math>\vec{b} \neq \vec{0}</math> <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}</math></p>



## Тестові завдання до розділу 5 «Геометрія»

### ПЛАНІМЕТРІЯ

Завдання 1–50 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні (рис. 1). Обчисліть величину кута  $x$ .

А	Б	В	Г	Д
30°	40°	50°	60°	130°

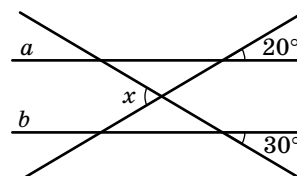


Рис. 1

*Розв'язання.* Враховуючи, що вертикальні кути рівні, одержуємо, що  $\angle 1 = \angle 3 = 20^\circ$  (рис. 2), а враховуючи, що відповідні кути при паралельних прямих  $a$  і  $b$  та січній  $AC$  рівні, маємо:  $\angle 2 = \angle 4 = 30^\circ$ . Для трикутника  $ABC$  кут  $x$  є зовнішнім і дорівнює сумі внутрішніх кутів цього трикутника, не суміжних із кутом  $x$ , отже,  $x = \angle 3 + \angle 4 = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$ . Тобто правильна відповідь **В**.

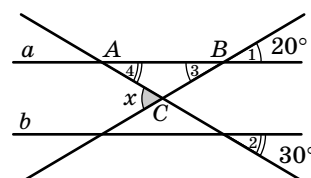


Рис. 2

2. Прямі  $m$  і  $n$  паралельні (рис. 3). Обчисліть величину кута  $x$ .

А	Б	В	Г	Д
40°	100°	110°	120°	140°

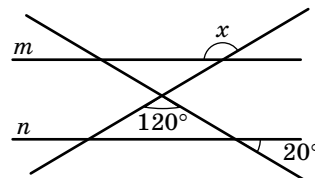


Рис. 3

3. Знайдіть величину кута  $x$  у геометричній фігурі, зображеній на рис. 4.

А	Б	В	Г	Д
45°	50°	60°	65°	70°

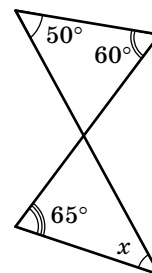


Рис. 4

4. Градусна міра зовнішнього кута  $A$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) становить  $130^\circ$  (рис. 5). Знайдіть градусну міру внутрішнього кута  $B$ .

А	Б	В	Г	Д
$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$

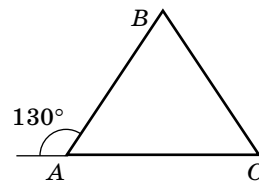


Рис. 5

5. Укажіть таке закінчення речення, щоб утворилося ПРАВИЛЬНЕ твердження.

Центром кола, описаного навколо будь-якого трикутника, є...

А	Б	В	Г	Д
Точка перетину медіан	Точка перетину серединних перпендикулярів	Точка перетину висот	Середина найбільшої сторони	Точка перетину бісектрис

6. У прямокутному трикутнику висота, яка опущена з вершини прямого кута, дорівнює 3 см, а гострий кут дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.

А	Б	В	Г	Д
6 см	12 см	$2\sqrt{3}$ см	$4\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см

*Розв'язання.* У трикутнику  $ABC$  (рис. 6):  $CD \perp AB$  ( $CD$  — висота трикутника);  $CD = 3$  см;  $\angle A = 30^\circ$ . У прямокутному трикутнику  $ACD$  катет  $CD$  лежить проти кута в  $30^\circ$ , тому він дорівнює половині гіпотенузи  $AC$  цього трикутника. Тоді

$$AC = 2CD = 6 \text{ (см)}. \text{ У прямокутному трикутнику } ABC: \cos A = \frac{AC}{AB}, \text{ тоді } AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{6}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}. \text{ Тобто правильна відповідь Г.}$$

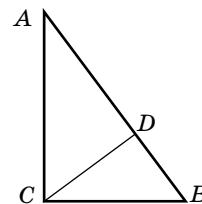


Рис. 6

7. У прямокутному трикутнику висота, яка опущена з вершини прямого кута, дорівнює 12 см, а один із катетів дорівнює 24 см. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12 см	24 см	$4\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см	$16\sqrt{3}$ см

8. Драбину завдовжки 7,8 м приставили до стіни будинку урівень з нижнім краєм вікна (рис. 7). Нижній кінець драбини розташований на відстані 3 м від будинку. Знайдіть висоту, на якій розташоване вікно.

А	Б	В	Г	Д
6 м	6,2 м	6,5 м	7 м	7,2 м

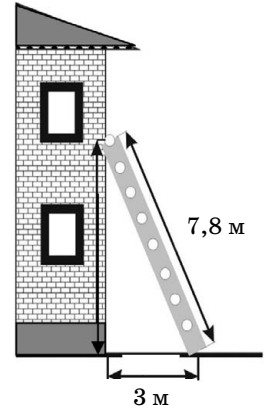


Рис. 7

9. За даними рис. 8 знайдіть кут  $B$  трикутника  $ABC$ .

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$

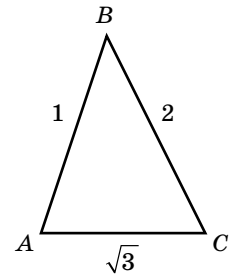


Рис. 8

*Розв'язання*

I спосіб. Якщо помітити, що в трикутнику  $ABC$ :  $AB^2 + AC^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = BC^2$ , то за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, це означає, що трикутник  $ABC$  прямокутний з прямим кутом  $A$ . Тоді з прямокутного трикутника  $ABC$ :  $\cos B = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ . Враховуючи, що кут  $B$  гострий, одержуємо  $\angle B = 60^\circ$ . Тобто правильна відповідь **В**.

II спосіб. За теоремою косинусів для трикутника  $ABC$ :  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$ . Тоді одержуємо:  $(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos B$ , тобто  $3 = 5 - 4 \cos B$ ,  $4 \cos B = 2$ ,  $\cos B = \frac{1}{2}$ . Враховуючи, що кут  $B$  гострий (його косинус додатний), одержуємо  $\angle B = 60^\circ$ . Тобто правильна відповідь **В**.

10. Знайдіть кут  $A$  трикутника  $ABC$  зі сторонами:  $AB = 1$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{5}$ .

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$

11. Сторони трикутника, одна з яких втричі більша за другу, утворюють кут  $120^\circ$ , а довжина третьої сторони дорівнює  $4\sqrt{13}$ . Знайдіть найменшу сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
4	2	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{13}$	$4\sqrt{\frac{13}{7}}$

12. Чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. Відомо, що  $AB=2$  см,  $BC=4$  см,  $\angle A=60^\circ$ . Знайдіть діагональ  $BD$ .

А	Б	В	Г	Д
6 см	$2\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{5}$ см	10 см	$2\sqrt{6}$ см

13. Катети прямокутного трикутника менші за гіпотенузу на 2 см та на 4 см відповідно. Знайдіть синус найменшого кута трикутника.

А	Б	В	Г	Д
0,2	0,4	0,5	0,6	0,8

*Розв'язання.* Нехай у прямокутному трикутнику  $ABC$  (рис. 9) гіпотенуза  $AB=x$  см. Тоді за умовою катети відповідно дорівнюють:  $AC=(x-2)$  см,  $BC=(x-4)$  см. За теоремою Піфагора  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , тобто  $(x-2)^2 + (x-4)^2 = x^2$ . Тоді  $x^2 - 12x + 20 = 0$ ,  $x_1=10$ ,  $x_2=2$ . Значення  $x=2$  не задовольняє умову задачі (якщо  $x=2$ , то довжина відрізка  $BC$  від'ємна, що неможливо).

Отже,  $AB=x=10$  (см),  $AC=x-2=8$  (см),  $BC=x-4=6$  (см). У трикутнику найменший кут лежить проти найменшої сторони, тобто найменшим є кут  $A$ . Тоді з прямокутного трикутника  $ABC$ :

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6. \text{ Тобто правильна відповідь Г.}$$

*Зауваження.* При розв'язуванні аналогічних задач корисно пам'ятати **орієнтир**: якщо в умові геометричної задачі на обчислення не задано жодного відрізка або задані відрізки та кути не об'єднуються в зручний для розв'язування трикутник, то для розв'язування доцільно ввести невідомий відрізок (або невідомий кут, або декілька невідомих) і скласти рівняння за умовою задачі.

14. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 1,5 см і 2,5 см. Знайдіть довжину гіпотенузи заданого трикутника.

А	Б	В	Г	Д
1,5 см	2,5 см	4 см	5 см	6 см

*Вказівка.* Позначити другий катет і гіпотенузу через  $x$  і  $y$  відповідно, а для складання рівнянь використати те, що бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на частини, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам (тобто  $\frac{x}{y} = \frac{1,5}{2,5}$ ), а також теорему Піфагора.

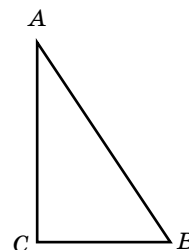


Рис. 9

15. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами, які дорівнюють 6 і 8.

А	Б	В	Г	Д
$4\pi$	$6\pi$	$8\pi$	$10\pi$	$20\pi$

*Розв'язання.* Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють  $a = 6$  і  $b = 8$ , то за теоремою Піфагора гіпотенуза цього трикутника дорівнює  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ . Тоді радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи:  $R = \frac{1}{2}c = 5$  і довжина описаного кола  $l = 2\pi R = 10\pi$ . Тобто правильна відповідь Г.

16. Знайдіть площу (у  $\text{см}^2$ ) прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а один із катетів — 6 см.

А	Б	В	Г	Д
$15 \text{ см}^2$	$24 \text{ см}^2$	$30 \text{ см}^2$	$48 \text{ см}^2$	$60 \text{ см}^2$

17. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом  $30^\circ$ , вписаного в коло радіуса 2.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	2	4

18. Знайдіть довжину кола, описаного навколо квадрата зі стороною 4.

А	Б	В	Г	Д
$4\pi$	$8\pi$	$2\pi\sqrt{3}$	$4\pi\sqrt{3}$	$8\pi\sqrt{3}$

19. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник із катетами, що дорівнюють 6 і 8.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

20. Знайдіть площу круга, вписаного в квадрат із діагоналлю, яка дорівнює 4.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$6\pi$	$8\pi$

21. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 2.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$

22. Знайдіть довжину висоти, проведеної до бічної сторони рівнобедреного трикутника зі сторонами, які дорівнюють 10, 10, 16.

А	Б	В	Г	Д
2	2,4	4,8	9,6	10

23. Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 12 см.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{3}$ см	$4\sqrt{3}$ см	$6\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см	6 см

24. Радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABC$  з тупим кутом  $A$ , дорівнює 2. Сторона  $CB = 2\sqrt{3}$ . Знайдіть кут  $A$ .

А	Б	В	Г	Д
$120^\circ$	$135^\circ$	$145^\circ$	$150^\circ$	$60^\circ$

*Розв'язання.* Радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ , можна обчислювати за формулою

$R = \frac{a}{2\sin A}$ . За умовою  $R = 2$ ,  $a = CB = 2\sqrt{3}$ . Тоді одержуємо  $2 = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin A}$ . Звідси  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Як відомо,  $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Враховуючи, що за умовою кут  $A$  тупий, одержуємо, що  $\angle A = 120^\circ$ .

Тобто правильна відповідь **А**.

25. На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  позначені відповідно точки  $M$  і  $K$  так, що прямі  $MK$  і  $AC$  паралельні. Знайдіть довжину сторони  $AB$ , якщо  $AM = AC = 12$ , а  $MK = 4$ .

А	Б	В	Г	Д
14	16	18	20	22

*Вказівка.* Використати, що пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний до даного (зручно також ввести невідомий відрізок  $AB = x$ ).

26. Знайдіть висоту дерева, якщо довжина його тіні дорівнює 3,5 м, а довжина тіні від вертикальної двометрової палиці становить 0,7 м (рис. 10).

А	Б	В	Г	Д
3,5 м	5,5 м	7 м	10 м	17,5 м

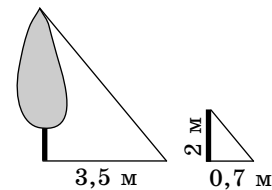


Рис. 10

27. Чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм (рис. 11). Точка  $K$  — середина сторони  $AB$ . Відрізок  $DK$  перетинає діагональ  $AC$  у точці  $O$ . Знайдіть відношення довжин відрізків  $AO : OC$ .

А	Б	В	Г	Д
1:2	1:3	2:3	3:4	3:5

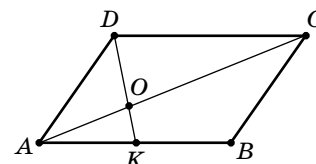


Рис. 11

28. У паралелограмі  $ABCD$   $AB=32$ ,  $AD=14$ ,  $BD=42$ . Знайдіть  $AC$ .

А	Б	В	Г	Д
22	24	26	28	30

*Розв'язання.* Оскільки сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін, то  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ . Тобто  $AC^2 + 42^2 = 2(32^2 + 14^2)$ , тоді  $AC^2 = 676$ , отже,  $AC = 26$ . Тобто правильна відповідь **В**.

29. У паралелограмі  $ABCD$   $AC=13$ ,  $AD=7$ ,  $BD=21$ . Знайдіть  $AB$ .

А	Б	В	Г	Д
10	13	14	16	18

30. Знайдіть площу ромба з діагоналями, які дорівнюють 10 і 16.

А	Б	В	Г	Д
60	40	100	160	80

31. У ромбі  $ABCD$   $AB=10$ ,  $BD=16$ . Знайдіть висоту ромба.

А	Б	В	Г	Д
4	4,8	5	5,2	6

*Вказівка.* Врахувати, що висота ромба збігається з висотою трикутника  $ABD$  з відомими сторонами.

32. Висоти паралелограма 8 і 12 см, а кут між ними дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
24 см <sup>2</sup>	40 см <sup>2</sup>	48 см <sup>2</sup>	72 см <sup>2</sup>	96 см <sup>2</sup>

33. Площа паралелограма  $ABCD$  (рис. 12) дорівнює 18. Точка  $K$  лежить на прямій  $CD$ . Знайдіть площу трикутника  $ABK$ .

А	Б	В	Г	Д
6	8	9	10	12

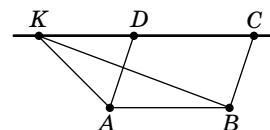


Рис. 12

34. Рівнобедрена трапеція  $MNPQ$  ( $MN \parallel PQ$ ) (рис. 13) описана навколо кола. Відомо, що  $MN = 2$ ,  $PQ = 18$ . Знайдіть радіус кола.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

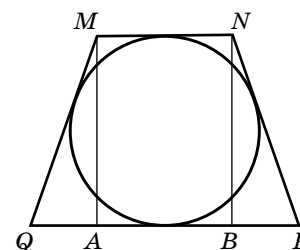


Рис. 13

*Розв'язання.* Оскільки в описаному чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні, то  $MN + PQ = MQ + NP$  (1). За умовою трапеція рівнобедрена, тоді  $MQ = NP$ , і з рівності (1) одержуємо  $2 + 18 = 2MQ$ , тобто  $MQ = 10$ . Проведемо висоти трапеції  $MA$  і  $NB$ , тоді  $ABNM$  — прямокутник, отже,  $AB = MN = 2$ . Крім того, у рівнобедреній трапеції одержуємо, що  $\triangle AMQ = \triangle BNP$  (за катетом і гострим кутом), тоді  $AQ = BP = \frac{QP - AB}{2} = \frac{18 - 2}{2} = 8$ . З прямокутного трикутника  $AMQ$ :  $AM = \sqrt{MQ^2 - AQ^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ . Враховуючи, що діаметр кола, вписаного в трапецію, дорівнює висоті трапеції, одержуємо  $2R = AM = 6$ , отже, радіус кола дорівнює:  $R = 3$ . Тобто правильна відповідь Б.

35. У трапеції, описаній навколо кола, бічні сторони дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

А	Б	В	Г	Д
4 см	5 см	6 см	7 см	8 см

36. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобедрену трапецію  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), якщо  $AB = 4$ ,  $DC = 16$ .

А	Б	В	Г	Д
$4\pi$	$8\pi$	$12\pi$	$14\pi$	$16\pi$



37. Трапеція з бічною стороною 6 см вписана в коло. Діагональ трапеції утворює з більшою основою кут  $\alpha$ , для якого  $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ . Обчисліть радіус описаного навколо трапеції кола.

А	Б	В	Г	Д
4 см	4,5 см	5 см	5,5 см	6 см

*Вказівка.* Врахувати, що коло, описане навколо трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ,  $AB=6$ ), буде також описане навколо трикутника  $ABD$ ,

і використати формулу  $R = \frac{AB}{2\sin\alpha}$ .

38. У рівнобічній трапеції довжини основ дорівнюють 21 см і 9 см, а висота становить 8 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

А	Б	В	Г	Д
10 см	10,625 см	9,125 см	9 см	11 см

39. Точка  $M$  — середина сторони квадрата  $ABCD$  (рис. 14). Площа зафарбованої частини дорівнює  $6 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу всього квадрата.

А	Б	В	Г	Д
$12 \text{ см}^2$	$18 \text{ см}^2$	$20 \text{ см}^2$	$24 \text{ см}^2$	$36 \text{ см}^2$

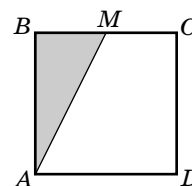


Рис. 14

40. У трапеції  $ABCD$  (рис. 15) основи  $BC$  і  $AD$  відносяться як 1:3. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника  $BDC$  дорівнює  $4 \text{ см}^2$ .

А	Б	В	Г	Д
$8 \text{ см}^2$	$10 \text{ см}^2$	$12 \text{ см}^2$	$16 \text{ см}^2$	$20 \text{ см}^2$

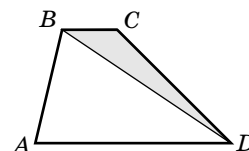


Рис. 15

41. Знайдіть внутрішній кут правильного десятикутника.

А	Б	В	Г	Д
$36^\circ$	$144^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$

42. Визначте зовнішній кут многокутника, зображеного на рис. 16.

А	Б	В	Г	Д
100°	110°	90°	95°	120°

*Вказівка.* Для розв'язування можна, наприклад, продовжити сторону  $AB$  за точку  $A$  — до перетину в точці  $K$  зі стороною  $DE$  і розглянути шуканий кут як зовнішній кут трикутника  $AKE$ .

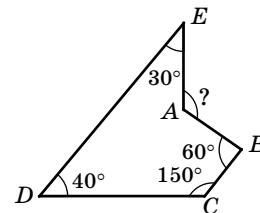


Рис. 16

43. На папері в клітинку зображено трикутник (рис. 17). Відомо, що площа однієї клітинки дорівнює  $1 \text{ см}^2$ . Укажіть, яким із вказаних чисел може виражатися площа цього трикутника (у  $\text{см}^2$ ).

А	Б	В	Г	Д
4	6	8	10	12



Рис. 17

44. Укажіть кількість осей симетрії правильного шестикутника.

А	Б	В	Г	Д
24	12	6	3	Інша відповідь

45. Многокутник, зображений на рис. 18, складено з трьох рівних квадратів. Знайдіть площу многокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

А	Б	В	Г	Д
$6 \text{ см}^2$	$7 \text{ см}^2$	$9 \text{ см}^2$	$12 \text{ см}^2$	$16 \text{ см}^2$

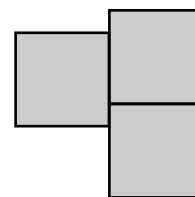


Рис. 18

46. Якщо на фігурі, яка зображена на рис. 19,  $AB = BC$ , то чому дорівнює координата  $x$  точки  $B$ ?

А	Б	В	Г	Д
2,5	4	6	6,5	7,5

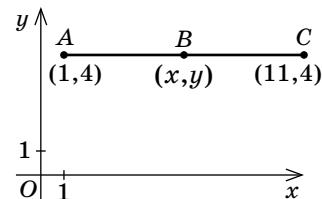


Рис. 19

47. Серед векторів  $\vec{a}(-4; 8)$ ,  $\vec{b}(4; 4)$ ,  $\vec{c}(0; -2)$ ,  $\vec{d}(2; -4)$  знайдіть колінеарні.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{d} \text{ і } \vec{b}$	$\vec{a} \text{ і } \vec{d}$	$\vec{a} \text{ і } \vec{c}$	$\vec{d} \text{ і } \vec{c}$	$\vec{c} \text{ і } \vec{b}$

48. Знайдіть довжину вектора  $\vec{a}(6; x)$ , якщо відомо, що він колінеарний вектору  $\vec{b} + \vec{c}$ , де  $\vec{b}(-3; 0)$ ,  $\vec{c}(0; 2)$ .

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$	$4\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$

*Розв'язання.* Спочатку знайдемо вектор  $\vec{b} + \vec{c} = (-3; 2)$ . У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, отже,  $\frac{6}{-3} = \frac{x}{2}$ . Тоді  $x = -4$ . Отже,  $\vec{a}(6; -4)$  і  $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ . Тобто правильна відповідь А.

49. На площині дано чотири точки  $A(2; 5)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(1; 2)$ ,  $D(3; 4)$ . Знайдіть кут між векторами  $\vec{AB}$  і  $\vec{CD}$ .

А	Б	В	Г	Д
$45^\circ$	$30^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$

50. У паралелограмі  $ABCD$  точка  $O$  — точка перетину діагоналей. Виразіть вектор  $\vec{BO}$  через вектори  $\vec{AB} = \vec{a}$  і  $\vec{AD} = \vec{b}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{b} - \vec{a}$	$\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$	$\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$	$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

Розв'яжіть завдання 51–75. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу.

51. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 9, 10, 17.

Відповідь: \_\_\_\_\_

52. Три кола, радіуси яких дорівнюють 6 см, 2 см і 4 см, дотикаються одне до одного зовнішнім чином. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центри всіх заданих кіл.

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Врахувати, що коли два кола дотикаються зовнішнім чином, то відстань між їх центрами дорівнює сумі радіусів цих кіл, і знайти радіус кола, описаного навколо трикутника з відомими трьома сторонами.

53. З точки  $A$ , яка лежить на колі, проведені дві хорди, довжини яких дорівнюють 7 і 15. Знайдіть діаметр кола, якщо відстань між серединами хорд дорівнює 10.

Відповідь: \_\_\_\_\_

54. У трикутнику  $ABC$  (рис. 20) зі сторонами  $AB=12$ ,  $BC=14$ ,  $AC=9$  бісектриси  $BD$  і  $AE$  внутрішніх кутів  $B$  і  $A$  перетинаються у точці  $O$ . Обчисліть відношення  $AO:OE$ .

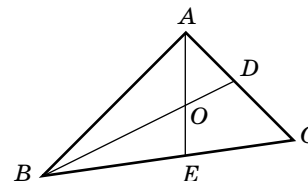


Рис. 20

*Розв'язання.* Використаємо двічі властивість бісектриси кута трикутника (вона ділить протилежну сторону на частини, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін).

$$\text{У трикутнику } ABC \text{ } AE \text{ — бісектриса, тоді } \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Враховуючи, що } BC=14, \text{ одержуємо: } BE = \frac{4}{7} \cdot BC = \frac{4}{7} \cdot 14 = 8.$$

$$\text{У трикутнику } ABE \text{ } BO \text{ — бісектриса, тоді } \frac{AO}{OE} = \frac{AB}{BE} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Враховуючи, що відповідь має бути записана у вигляді десяткового дробу, одержуємо  $\frac{AO}{OE} = 1,5$ .

Відповідь: 1,5.

55. У трикутнику  $ABC$  бісектриси  $BD$  і  $AE$  внутрішніх кутів  $B$  і  $A$  перетинаються у точці  $O$ . Обчисліть довжину сторони  $AC$ , якщо  $AB=4$ ,  $AO:OE=3:2$  та  $AD:DC=6:7$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

56. У рівнобедрений трикутник  $ABC$  з основою  $AC$  вписане коло з центром  $O$ . Промінь  $CO$  перетинає сторону  $AB$  в точці  $K$ , причому  $AK=6$ ,  $BK=12$ . Знайдіть периметр трикутника.

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Врахувати, що центр вписаного в трикутник кола лежить у точці перетину бісектрис його внутрішніх кутів, тому  $CK$  — бісектриса трикутника.

57. Навколо рівнобедреного трикутника з основою  $AC$  і кутом при основі  $75^\circ$  описане коло з центром  $O$ . Знайдіть його радіус, якщо площа трикутника  $BOC$  дорівнює 16.

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* За властивістю вписаних і центральних кутів одержуємо, що  $\angle BOC = 2\angle BAC$ .

58. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 15, а проекція другого катета на гіпотенузу дорівнює 16. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо цього трикутника.

Відповідь: \_\_\_\_\_

59. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, описаної навколо кола з радіусом 5, якщо відомо, що бічна сторона трапеції дорівнює 12.

Відповідь: \_\_\_\_\_

60. Бічна сторона рівнобедреної трапеції дорівнює  $\sqrt{10}$ , а основи дорівнюють 3 і 5. Знайдіть діагональ трапеції.

Відповідь: \_\_\_\_\_

61. Більша основа рівнобедреної трапеції дорівнює 8, бічна сторона — 9, діагональ — 11. Знайдіть меншу основу трапеції.

Відповідь: \_\_\_\_\_

62. Основи трапеції дорівнюють 11 см і 4 см, а діагоналі — 9 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції (у  $\text{см}^2$ ).

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Якщо в трапеції  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) через вершину  $B$  провести  $BK \parallel AC$  ( $K$  — точка перетину прямих  $DC$  і  $BK$ ), то одержимо трикутник  $DBK$ , площа якого дорівнює площі заданої трапеції. (Доведіть самостійно.)

63. З вершин  $B$  і  $D$  прямокутника  $ABCD$  до діагоналі  $AC$  проведені перпендикуляри  $BE$  та  $DF$ . Відстань між точками  $E$  та  $F$  дорівнює 6 см, а  $BE = 4$  см. Обчисліть площу прямокутника (у  $\text{см}^2$ ).

Відповідь: \_\_\_\_\_

64. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 3 см і 1 см, а площа трапеції дорівнює  $2 \text{ см}^2$ . Знайдіть гострий кут трапеції (у градусах).

Відповідь: \_\_\_\_\_

65. Більша основа трапеції дорівнює 9. Знайдіть її меншу основу, якщо відстань між серединами діагоналей дорівнює 2.

Відповідь: \_\_\_\_\_

66. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 8 см і 10 см. Обчисліть периметр трапеції (у см).

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Обґрунтуйте, що коли в трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) діагональ  $AC$  є бісектрисою гострого кута  $A$ , то трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.

67. У паралелограмі  $ABCD$  бісектриса кута  $D$  перетинає сторону  $AB$  у точці  $K$  і пряму  $BC$  у точці  $P$ . Знайдіть периметр трикутника  $CDP$ , якщо  $DK = 4$ ,  $PK = 8$ ,  $AD = 3$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

68. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, якщо її діагональ дорівнює 10 і утворює з основою кут, косинус якого дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{10}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

69. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, якщо її висота дорівнює 3, а тангенс кута між діагоналлю й основою дорівнює  $\frac{1}{4}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

70. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, якщо її діагональ дорівнює  $2\sqrt{13}$ , а середня лінія дорівнює 4.

Відповідь: \_\_\_\_\_

71. Знайдіть радіус кола, яке вписане в рівнобедрену трапецію, якщо середня лінія трапеції дорівнює  $\sqrt{10}$ , а косинус кута при основі трапеції дорівнює  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

72. Дано точки  $A(-4; -1)$ ,  $B(-2; 3)$  і  $C(-1; -3)$ . Точка  $D$  належить прямій  $y = 4$  та  $AD \perp BC$ . Знайдіть координати точки  $D$ . У відповідь запишіть суму її координат.

Відповідь: \_\_\_\_\_

73. Обчисліть скалярний добуток векторів, зображених на рис. 21.

Відповідь: \_\_\_\_\_

74. У квадраті  $ABCD$  сторона  $AB$  дорівнює 4 см. Знайдіть скалярний добуток  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

75. Сторона рівностороннього трикутника  $ABC$  дорівнює 6 см. Знайдіть скалярний добуток  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

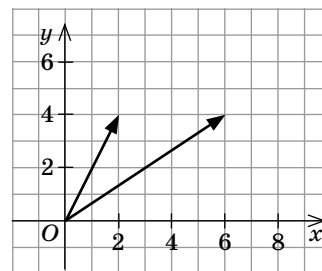


Рис. 21

СТЕРЕОМЕТРІЯ

Завдання 1–34 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1.  $ABCD$  (рис. 1) — квадрат ( $M$  — середина  $CD$ ). Відрізок  $BO$  перпендикулярний до площини  $ABC$ . Укажіть відстань від точки  $O$  до прямої  $CD$ .

А	Б	В	Г	Д
$OM$	$OC$	$OD$	$OB$	$BC$

*Розв'язання.* Відстань від точки  $O$  до прямої  $CD$  — це довжина перпендикуляра, опущеного з точки  $O$  на пряму  $CD$ . За умовою  $ABCD$  — квадрат, тоді  $BC \perp CD$ . Оскільки  $BO \perp$  пл.  $ABCD$ , то  $BC$  — проекція  $OC$  на пл.  $ABCD$ ; за теоремою про три перпендикуляри  $OC \perp CD$ . Отже, відстань від точки  $O$  до прямої  $CD$  — це довжина відрізка  $OC$ . Тобто правильна відповідь Б.

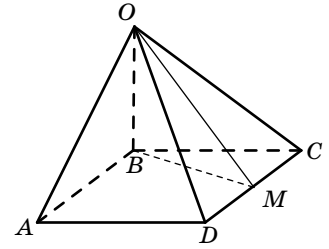


Рис. 1

2.  $ABC$  (рис. 2) — прямокутний трикутник ( $\angle C = 90^\circ$ ,  $K$  — середина  $BC$ ). Відрізок  $AP$  перпендикулярний до площини  $ABC$ . Укажіть відстань від точки  $P$  до прямої  $CB$ .

А	Б	В	Г	Д
$PA$	$AC$	$PB$	$PC$	$PK$

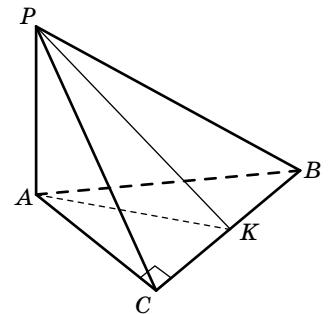


Рис. 2

3.  $ABCD$  (рис. 3) — квадрат ( $M$  — середина  $CD$ ). Відрізок  $BO$  перпендикулярний до площини  $ABC$ . Укажіть відстань від прямої  $BO$  до прямої  $CD$ .

А	Б	В	Г	Д
$OM$	$OC$	$OD$	$OB$	$BC$

*Розв'язання.* Відстань між мимобіжними прямими  $BO$  і  $CD$  — це довжина їх спільного перпендикуляра. Оскільки  $BC \perp CD$  ( $ABCD$  — квадрат) і  $BC \perp BO$  ( $BO \perp$  пл.  $ABCD$ ), то таким спільним перпендикуляром до прямих  $BO$  і  $CD$  є відрізок  $BC$ . Отже, відстань від прямої  $BO$  до прямої  $CD$  — це довжина відрізка  $BC$ . Тобто правильна відповідь Д.

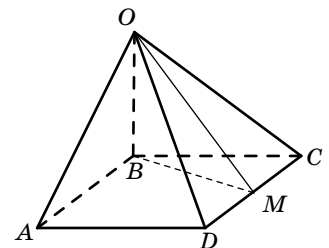


Рис. 3

4.  $ABC$  — прямокутний трикутник ( $\angle C = 90^\circ$ ,  $K$  — середина  $BC$ ). Відрізок  $AP$  перпендикулярний до площини  $ABC$ . Укажіть відстань від прямої  $AP$  до прямої  $CB$ .

А	Б	В	Г	Д
$AB$	$AC$	$PB$	$PC$	$PK$

5. Визначте на рис. 4 лінійний кут двогранного кута з ребром  $BC$ , якщо  $PA \perp$  пл.  $ABC$  і у трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$\angle PCA$	$\angle PKA$	$\angle PBA$	$\angle APK$	Інша відповідь

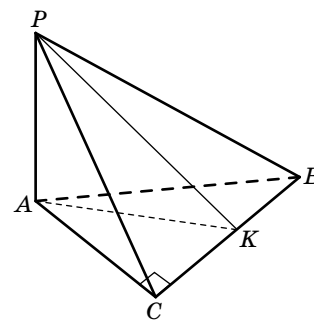


Рис. 4

*Розв'язання.* Щоб отримати лінійний кут двогранного кута з ребром  $BC$ , досить у кожній грані заданого кута з деякої точки ребра  $BC$  провести перпендикуляри до ребра — кут між ними і буде шуканим лінійним кутом. Оскільки  $AC \perp CB$  (у трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ) і  $PA \perp$  пл.  $ABC$ , то  $AC$  — проекція  $PC$  на пл.  $ABC$ ; за теоремою про три перпендикуляри  $PC \perp CB$ . Отже,  $\angle PCA$  — це лінійний кут двогранного кута з ребром  $BC$ . Тобто правильна відповідь А.

6. На рис. 5 зображено правильну трикутну піраміду  $SABC$  з висотою  $SO$ . Визначте на рисунку лінійний кут двогранного кута з ребром  $BC$ .

А	Б	В	Г	Д
$\angle SCA$	$\angle SBA$	$\angle SCO$	$\angle SBO$	$\angle SMO$

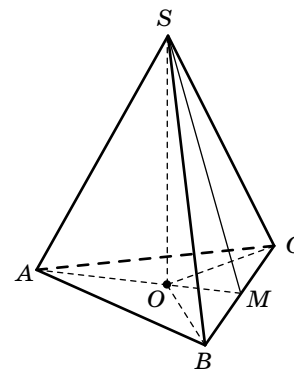


Рис. 5

7. На рис. 6 зображено прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть, які з прямих перпендикулярні.

А	Б	В	Г	Д
$AB$ і $A_1 C_1$	$BB_1$ і $AC$	$DD_1$ і $BB_1$	$A_1 B_1$ і $AC$	$B_1 C_1$ і $AD$

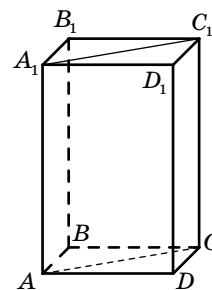


Рис. 6



8. На рис. 7 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть, які з вказаних прямих паралельні.

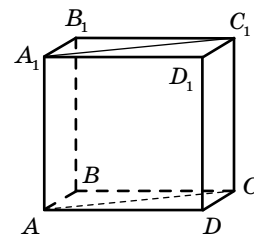


Рис. 7

А	Б	В	Г	Д
$AB$ і $A_1C_1$	$BB_1$ і $AC$	$DD_1$ і $BB_1$	$A_1B_1$ і $AC$	$BC$ і $A_1C_1$

9. Двогранний кут дорівнює  $60^\circ$ . Задано точку на одній із граней кута. Відстань від цієї точки до другої грані кута становить 4 см. Знайдіть відстань від заданої точки до ребра двогранного кута.

А	Б	В	Г	Д
4	8	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	$2\sqrt{3}$

10. Через точку  $O$  — точку перетину діагоналей квадрата  $ABCD$  — проведено перпендикуляр  $MO$  до його площини. Відомо, що  $AB = 6$ . Обчисліть відстань між прямими  $AB$  і  $MO$ .

А	Б	В	Г	Д
3	6	2	$3\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$

11.  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 8) — правильна трикутна призма. Знайдіть кут між прямими  $A_1B_1$  і  $CC_1$ .

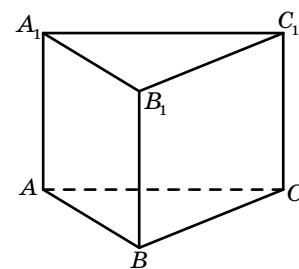


Рис. 8

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$

12. Знайдіть висоту прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 26, а сторони основи становлять 6 і 8.

А	Б	В	Г	Д
8	10	12	20	24

*Розв'язання.* У прямокутному паралелепіпеді квадрат його діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів:  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ . За умовою  $d = 26$ ,  $a = 6$ ,  $b = 8$ . Тоді  $26^2 = 6^2 + 8^2 + c^2$ . Звідси  $c^2 = 576$ , тобто  $c = 24$  — висота паралелепіпеда. Отже, правильна відповідь Д.

13. Довжини двох протилежних сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3, його діагональ дорівнює 13, а висота 12. Знайдіть довжини двох інших сторін основи.

А	Б	В	Г	Д
8	4	3	2	1

14. Діагональ куба дорівнює 9 см. Знайдіть площу повної поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
81 см <sup>2</sup>	243 см <sup>2</sup>	486 см <sup>2</sup>	118 см <sup>2</sup>	162 см <sup>2</sup>

15. На рис. 9 зображено розгортку поверхні тіла, складену з шести парно рівних прямокутників, розміри яких у сантиметрах вказано на рисунку. Знайдіть об'єм цього тіла.

А	Б	В	Г	Д
120 см <sup>3</sup>	100 см <sup>3</sup>	150 см <sup>3</sup>	144 см <sup>3</sup>	Інша відповідь

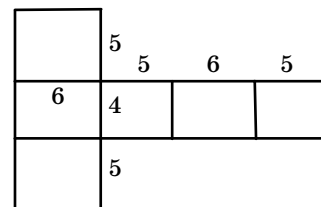


Рис. 9

16. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 5 см та основами 2 см і 8 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см. Обчисліть площу повної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
90 см <sup>2</sup>	100 см <sup>2</sup>	110 см <sup>2</sup>	130 см <sup>2</sup>	170 см <sup>2</sup>

17. Обчисліть довжину меншої діагоналі прямої призми, в основі якої лежить ромб зі стороною 4 м та гострим кутом 60°. Висота призми становить 3 м.

А	Б	В	Г	Д
3 м	4 м	5 м	20 м	$\sqrt{37}$ м

*Розв'язання.* Нехай  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 10) — задана пряма призма. Як відомо, висотою прямої призми є бічне ребро, отже,  $BB_1 = CC_1 = 3$  м. За умовою  $ABCD$  — ромб, у якого  $AD = 4$  м,  $\angle A = 60^\circ$ .

Як відомо, у ромба менша діагональ лежить проти гострого кута, отже,  $BD < AC$ . Тоді меншою діагоналлю призми буде  $DB_1$  (дійсно, з прямокутного трикутника  $BB_1 D$ :

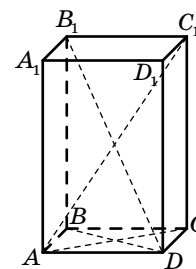


Рис. 10

$B_1D = \sqrt{BD^2 + B_1B^2} = \sqrt{BD^2 + 3^2}$ , а з прямокутного трикутника  $ACC_1$ :  
 $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{AC^2 + 3^2}$ , отже,  $B_1D < AC_1$ ). У рівнобедреному  
 трикутнику  $ABD$  ( $AB = AD$  як сторони ромба)  $\angle A = 60^\circ$ , отже,  
 цей трикутник рівносторонній і  $BD = AB = AD = 4$  м. Тоді довжина  
 меншої діагоналі прямої призми:  $B_1D = \sqrt{BD^2 + B_1B^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  (м).  
 Отже, правильна відповідь В.

18. Обчисліть довжину висоти прямої призми, в основі якої лежить ромб із діагоналями 6 см та 8 см, якщо довжина більшої діагоналі призми дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{7}$ см	10 см

19. Осовим перерізом циліндра є квадрат, сторона якого дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$9\pi$ см <sup>3</sup>	$27\pi$ см <sup>3</sup>	$36\pi$ см <sup>3</sup>	$54\pi$ см <sup>3</sup>	$108\pi$ см <sup>3</sup>

20. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата навколо своєї сторони, довжина якої дорівнює 4 см.

А	Б	В	Г	Д
$4\pi$ см <sup>3</sup>	$16\pi$ см <sup>3</sup>	$32\pi$ см <sup>3</sup>	$48\pi$ см <sup>3</sup>	$64\pi$ см <sup>3</sup>

21. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює 12 см.

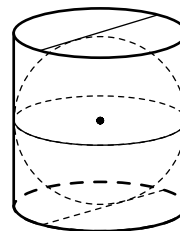
А	Б	В	Г	Д
$12\pi$ см <sup>3</sup>	$216\pi$ см <sup>3</sup>	$288\pi$ см <sup>3</sup>	$144\pi$ см <sup>3</sup>	$864\pi$ см <sup>3</sup>

22. Циліндр вписано в куб. Відомо, що об'єм куба дорівнює  $64$  см<sup>3</sup>. Обчисліть об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$32\pi$ см <sup>3</sup>	$16\pi$ см <sup>3</sup>	$64\pi$ см <sup>3</sup>	$12\pi$ см <sup>3</sup>	$8\pi$ см <sup>3</sup>

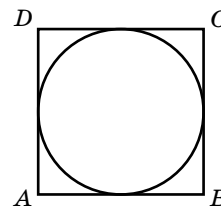
23. З металевієї циліндричної заготовки, осьовим перерізом якої є квадрат, виточили кулю найбільшого об'єму (рис. 11, а). Знайдіть відношення об'єму одержаних при цьому відходів до об'єму кулі.

А	Б	В	Г	Д
2:3	3:4	1:2	1:3	1:4



а

*Розв'язання.* Виточена куля буде мати найбільший об'єм, якщо її радіус (чи діаметр) буде найбільшим. А це буде в тому випадку, коли куля буде дотикатися до поверхні циліндра. Оскільки за умовою осьовим перерізом циліндра є квадрат, то в цей циліндр можна вписати кулю, яка і буде кулею найбільшого об'єму. Розглянемо осьовий переріз комбінації цих тіл (рис. 11, б).



б

Рис. 11

Нехай радіус кулі дорівнює  $x$  ( $R_{\text{кулі}} = x$ ). Осьовим перерізом кулі буде круг з радіусом  $x$ . За умовою осьовим перерізом циліндра є квадрат. Оскільки куля вписана в циліндр, то круг буде вписано в квадрат  $ABCD$ , отже, сторона квадрата дорівнює діаметру круга і дорівнює  $2x$  ( $AB = BC = 2x$ ). Тоді радіус основи циліндра

$R_{\text{цил}} = \frac{1}{2} AB = x$ , а висота  $H_{\text{цил}} = BC = 2x$ . Об'єм відходів — різниця об'ємів циліндра і кулі. Маємо:  $V_{\text{цил}} = \pi R_{\text{цил}}^2 \cdot H_{\text{цил}} = 2\pi x^3$ ,

$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{кулі}}^3 = \frac{4}{3} \pi x^3$ . Тоді  $V_{\text{відходів}} = V_{\text{цил}} - V_{\text{кулі}} = 2\pi x^3 - \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{2}{3} \pi x^3$ .

Одержуємо  $\frac{V_{\text{відходів}}}{V_{\text{кулі}}} = \frac{\frac{2}{3} \pi x^3}{\frac{4}{3} \pi x^3} = \frac{1}{2}$ . Отже, правильна відповідь **В**.

24. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	8	16

*Вказівка.* Врахувати, що вага кавуна прямо пропорційна його об'єму, а формою кавуна можна вважати кулю.

25. Радіус основи конуса дорівнює 6 см. Об'єм конуса —  $96\pi \text{ см}^3$ . Знайдіть твірну конуса.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	10 см	12 см	Інша відповідь

26. Задано точку  $A(-2; 4; 6)$ . Укажіть координати точки, симетричної точці  $A$  відносно площини  $xu$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 4; -6)$	$(-2; -4; 6)$	$(2; 4; 6)$	$(2; -4; -6)$	Інша відповідь

*Розв'язання.* При симетрії відносно площини  $xu$  координати точки по осях  $Ox$  і  $Oy$  не змінюються, а координата по осі  $Oz$  змінюється на протилежну (рис. 12). Тоді точка  $A'$ , симетрична точці  $A$  відносно площини  $xu$ , буде мати координати  $(-2; 4; -6)$ . Отже, правильна відповідь А.

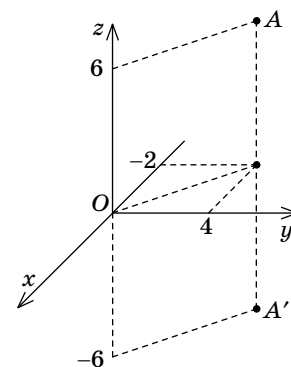


Рис. 12

27. Дано точку  $B(-2; 3; 4)$ . Знайдіть координати точки  $A$ , яка симетрична точці  $B$  відносно координатної площини  $yz$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 3; 4)$	$(-2; -3; 4)$	$(-2; 3; -4)$	$(2; -3; -4)$	$(2; -3; 4)$

28. Точка  $P$  симетрична точці  $A(-7; -2; 3)$  відносно координатної площини  $xz$ . Знайдіть координати точки  $P$ .

А	Б	В	Г	Д
$(7; -2; 3)$	$(-7; 2; 3)$	$(-7; 2; -3)$	$(-7; -2; -3)$	$(7; -2; -3)$

29. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці  $A(4; 2; 5)$  відносно координатної площини  $xu$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-4; 2; 5)$	$(4; -2; 5)$	$(4; 2; -5)$	$(-4; -2; 5)$	$(-4; 2; -5)$

30. Ортогональною проекцією відрізка з кінцями у точках  $A(7; -3; 5)$  і  $B(7; -3; 8)$  на координатну площину  $xu$  є:

А	Б	В	Г	Д
Пряма	Промінь	Відрізок	Точка	Фігура, що відрізняється від перелічених

31. У просторі задані точки  $A(4; 6; -10)$  і  $M(2; -2; 4)$ . Знайдіть координати точки  $C$ , яка симетрична точці  $A$  відносно точки  $M$ .

А	Б	В	Г	Д
(3; 2; -3)	(0; 2; -6)	(8; 2; -2)	(8; -10; 18)	(0; -10; 18)

*Розв'язання.* Нехай точка  $C$  має координати  $C(x; y; z)$ . За означенням симетрії відносно точки центр симетрії — точка  $M$  — є серединою відрізка  $AC$ . Враховуючи формули координат середини відрізка, маємо:  $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$ ,  $y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$ ,  $z_M = \frac{z_A + z_C}{2}$ ; одержуємо:  $2 = \frac{4 + x_C}{2}$ ,  $-2 = \frac{6 + y_C}{2}$ ,  $4 = \frac{-10 + z_C}{2}$ . Тоді  $x_C = 0$ ,  $y_C = -10$ ,  $z_C = 18$ , отже, точка  $C$ , симетрична точці  $A$  відносно точки  $M$ , буде мати координати  $(0; -10; 18)$ . Тобто правильна відповідь Д.

32. Знайдіть координати точки  $M$ , відносно якої точки  $K(-1; 6; 5)$  і  $N(-3; 4; 3)$  симетричні.

А	Б	В	Г	Д
(-4; 10; 8)	(-2; 5; 8)	(0; 0; 0)	(-5; 2; 1)	Інша відповідь

33. У просторі задані точки  $A(4; 7; -1)$  і  $M(2; -3; 5)$ . Знайдіть координати точки  $C$ , яка симетрична точці  $A$  відносно точки  $M$ .

А	Б	В	Г	Д
(3; 2; 2)	(6; 17; -7)	(0; 13; -11)	(0; -13; 11)	(-6; -17; 7)

34. На осі абсцис знайдіть усі точки, відстань від кожної з яких до точки  $A(4; -4; 0)$  дорівнює 5.

А	Б	В	Г	Д
(0; -7; 0), (0; -1; 0)	(0; 7; 0), (0; -1; 0)	(7; 0; 0), (-1; 0; 0)	(-7; 0; 0), (1; 0; 0)	(7; 0; 0), (1; 0; 0)

Розв'яжіть завдання 35–88. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу.

35. Через вершину  $A$  гострого кута прямокутного трикутника  $BAC$  до площини трикутника проведено перпендикуляр  $AM$  завдовжки 8 см. Відомо, що  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AC = 12$  см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямої  $BC$  (у см).

Відповідь: \_\_\_\_\_

36. Через вершину  $A$  гострого кута прямокутного трикутника  $BAC$  до площини трикутника проведено перпендикуляр  $AM$  завдовжки  $2\sqrt{6}$  см. Відомо, що  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $BC = 6$  см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямої  $BC$  ( $y$  см).

Відповідь: \_\_\_\_\_

37. Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 6 см, 8 см і 12 см складено з кубиків з довжиною ребра 1 см. Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар завтовшки в один кубик?

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Можна врахувати, що після вилучення зовнішнього шару завтовшки в один кубик усі розміри прямокутного паралелепіпеда зміняться на 2. Шукана кількість кубиків дорівнює різниці об'ємів заданого й одержаного паралелепіпедів.

38. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють  $20 \text{ см}^2$ ,  $40 \text{ см}^2$  і  $50 \text{ см}^2$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда ( $y \text{ см}^3$ ).

Відповідь: \_\_\_\_\_

39. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори з розрахунку: три одиниці на  $50 \text{ м}^3$ . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити на новий будинок, якщо він має форму прямокутного паралелепіпеда розміром  $15 \text{ м} \times 20 \text{ м} \times 30 \text{ м}$ ?

Відповідь: \_\_\_\_\_

40. Задано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  із ребром 1. Знайдіть градусну міру кута між прямими  $AC_1$  і  $CB_1$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

*Вказівка.* Обґрунтуйте, що  $CB_1 \perp$  пл.  $ABC_1 D_1$ , у якій лежить пряма  $AC_1$ .

41. Основою прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є паралелограм  $ABCD$ , у якому  $AD = 2$ ,  $CD = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle D = 60^\circ$ . Об'єм паралелепіпеда дорівнює 30. Обчисліть висоту паралелепіпеда.

Відповідь: \_\_\_\_\_

42. Основою прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є паралелограм  $ABCD$ , у якому  $AB = 4\sqrt{3}$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Тангенс кута між площиною основи й площиною  $B_1 AD$  дорівнює 1,5. Обчисліть висоту паралелепіпеда.

*Розв'язання\*.* Оскільки паралелепіпед прямий, то його висотою є бічне ребро; тоді  $BB_1 \perp$  пл.  $ABCD$ . Проведемо в площині основи  $BM \perp AD$ , тоді  $B_1 M \perp AD$  (за теоремою про три перпендикуляри). Отже,  $\angle B_1 MB$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $AD$  (а оскільки він гострий, то це і є кут між площинами  $B_1 AD$  і  $ABCD$ ) (табл. 70), тоді  $\text{tg } \angle B_1 MB = 1,5$ . З прямокутного трикутника  $ABM$ :  $BM = AB \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ .

З прямокутного трикутника  $B_1 MB$ :  $BB_1 = BM \cdot \text{tg } \angle B_1 MB = 6 \cdot 1,5 = 9$ .

Відповідь: 9.

\* Див. також рекомендації до розв'язування стереометричних задач на с. 186.

43. Основою прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є паралелограм  $ABCD$ , у якому  $CD = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle C = 45^\circ$ . Тангенс кута між площиною основи й площиною  $B_1AD$  дорівнює 3. Обчисліть висоту паралелепіпеда.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
44. Висота прямої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  дорівнює 36. Основа призми — трикутник  $ABC$ , площа якого дорівнює 12,  $AB = 5$ . Знайдіть тангенс кута між площиною  $ABC_1$  і площиною основи призми.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
45. Бічне ребро прямої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  дорівнює 16. Основа призми — трикутник  $ABC$ , площа якого дорівнює 4,  $BC = 3$ . Знайдіть тангенс кута між площинами  $A_1BC$  і  $ABC$ .  
Відповідь: \_\_\_\_\_
46. Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — паралелограм  $ABCD$ , у якому  $AD = 4\sqrt{2}$ ,  $\angle BCD = 135^\circ$ . Висота призми дорівнює 3. Знайдіть тангенс кута між площиною основи призми і площиною  $A_1DC$ .  
Відповідь: \_\_\_\_\_
47. Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$  з кутом  $150^\circ$  і стороною, яка дорівнює 10. Тангенс кута між площиною основи призми і площиною  $ABC_1$  дорівнює 4,2. Знайдіть висоту призми.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
48. Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$  з кутом  $150^\circ$  і стороною, яка дорівнює 2. Тангенс кута між площиною основи призми і площиною  $ABC_1$  дорівнює 4,2. Знайдіть висоту призми.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
49. Основою піраміди  $SABC$  — трикутник  $ABC$ , у якому  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $AC = 3$ . Бічне ребро  $SC$  перпендикулярне до площини основи;  $SC = CB$ . Точки  $K$  і  $F$  — середини сторін  $AC$  і  $AB$  відповідно. Знайдіть площу перерізу, що є паралельним прямій  $SC$  і проходить через точки  $K$  і  $F$ .  
Відповідь: \_\_\_\_\_
50. Основою піраміди  $SABC$  — правильний трикутник зі стороною  $2\sqrt{3}$ . Бічне ребро  $SB$  перпендикулярне до площини основи, а грань  $ACS$  нахилена до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
51. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетами, які дорівнюють 12 і 5. Усі бічні грані нахилені до основи під кутом  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
52. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом  $30^\circ$ , апофема дорівнює 4. Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_



53. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 13, 12 і 5. Кути між бічними гранями і площиною основи дорівнюють  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
54. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6, а кут між площиною основи і бічною гранню дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
55. В основі піраміди лежить правильний шестикутник  $ABCDEF$ . Бічне ребро  $BS$  перпендикулярне до площини основи і дорівнює ребру основи. Знайдіть градусну міру кута між бічним ребром  $FS$  і площиною основи.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
56. Об'єм правильної чотирикутної піраміди  $SABCD$  дорівнює  $60 \text{ м}^3$ . Точка  $K$  — середина ребра  $SC$ . Обчисліть об'єм піраміди  $KBCD$  (у  $\text{м}^3$ ).  
Відповідь: \_\_\_\_\_
57. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 10, 6 та 8 см, а всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом  $45^\circ$ . Обчисліть об'єм піраміди (у  $\text{см}^3$ ).  
Відповідь: \_\_\_\_\_
58. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Апофема утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Обчисліть площу бічної поверхні піраміди (у  $\text{см}^2$ ).  
Відповідь: \_\_\_\_\_
59. В основі піраміди рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є також правильним трикутником. Знайдіть об'єм піраміди (у  $\text{см}^3$ ).  
Відповідь: \_\_\_\_\_
60. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть площу повної поверхні піраміди (у  $\text{см}^2$ ).  
Відповідь: \_\_\_\_\_
61. Задано правильний тетраедр  $ABCD$  з ребром  $\sqrt{6}$ . Знайдіть відстань від вершини  $A$  до площини  $BDC$ .  
Відповідь: \_\_\_\_\_
62. Основою трикутної піраміди  $MABC$  є прямокутний трикутник  $ABC$  з гіпотенузою  $AB=10$  і катетом  $AC=8$ . Бічні ребра піраміди утворюють із висотою піраміди рівні кути в  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_
63. Основа піраміди — трикутник, дві сторони якого дорівнюють 1 і 2, а кут між ними дорівнює  $60^\circ$ . Кожне бічне ребро дорівнює  $\sqrt{13}$ . Знайдіть об'єм піраміди.  
Відповідь: \_\_\_\_\_

64. У піраміді  $SABC$  грані  $SAB$  і  $SAC$  перпендикулярні до площини основи, ребро  $BC$  дорівнює 10, а двогранний кут при ребрі  $BC$  дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо площа її основи дорівнює 30.

Відповідь: \_\_\_\_\_

65. Основою піраміди є прямокутник, кут між діагоналями якого дорівнює  $30^\circ$ , а площа дорівнює 9. Бічні ребра утворюють з площиною основи кути в  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.

Відповідь: \_\_\_\_\_

66. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого дорівнюють  $\sqrt{2}$  і утворюють кут у  $120^\circ$ . Бічні ребра нахилені до площини основи піраміди під однаковим кутом. Знайдіть об'єм піраміди, якщо бічне ребро дорівнює  $\sqrt{110}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

67. Основа піраміди  $MABCD$  — квадрат, діагональ якого дорівнює  $\sqrt{6}$ . Ребро  $MB$  перпендикулярне до площини основи, а кут між площинами  $ABC$  і  $AMD$  дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.

Відповідь: \_\_\_\_\_

68. Основа піраміди  $ABCD$  — прямокутний трикутник із гіпотенузою  $AB = 2\sqrt{30}$ .  $CD$  — висота піраміди, бічні ребра  $AD$  і  $BD$  нахилені до площини основи під кутами  $30^\circ$  і  $60^\circ$  відповідно. Знайдіть об'єм піраміди.

Відповідь: \_\_\_\_\_

69. В основі піраміди лежить рівнобедрений прямокутний трикутник із катетом, який дорівнює  $2\sqrt{6}$ . Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Обчисліть об'єм піраміди.

Відповідь: \_\_\_\_\_

70. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $2\sqrt{3}$  см і нахилена під кутом  $60^\circ$  до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.

Відповідь: \_\_\_\_\_

71. Основою піраміди  $SABCDEF$  є правильний шестикутник  $ABCDEF$ . Грань  $SED$  — правильний трикутник, площина якого перпендикулярна до площини основи. Знайдіть тангенс кута нахилу грані  $SAB$  до основи.

Відповідь: \_\_\_\_\_

72. Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку з центра основи конуса видно під кутом  $120^\circ$ , а з вершини конуса — під кутом  $90^\circ$ . Обчисліть площу перерізу (у  $\text{см}^2$ ).

Відповідь: \_\_\_\_\_

73. Висота конуса дорівнює 3 см, а твірна — 5 см. Знайдіть відношення площі основи конуса до площі його бічної поверхні.

Відповідь: \_\_\_\_\_

74. Діагоналі ромба дорівнюють 6 і 8. Куля, яка має радіус 4, дотикається до всіх його сторін. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

Відповідь: \_\_\_\_\_

75. У куб, ребро якого дорівнює  $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ , вписано сферу. Знайдіть площу поверхні сфери.

Розв'язання. Радіус сфери, вписаної в куб, дорівнює половині ребра куба. Отже,  $r_{\text{сфери}} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ . Пло-

ща поверхні сфери дорівнює  $S_{\text{сфери}} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 36$ .

Відповідь: 36.

76. На рис. 13 зображено ємність, у яку налито 1 л рідини. Обчисліть, на який об'єм (у літрах) розрахована ця ємність.

Відповідь: \_\_\_\_\_

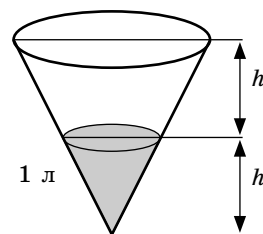


Рис. 13

Зауважимо, що при розв'язуванні й оформленні розв'язань завдань зі стереометрії доцільно враховувати такі рекомендації.

Зображення просторових тіл слід виконувати з урахуванням властивостей паралельного проектування (див. табл. 68).

У запису розв'язання слід обґрунтовувати тільки ті твердження, які будуть використані в подальшому розв'язанні.

Основна частина стереометричних завдань, що пропонуються в тестах ЗНО з математики, — це завдання на обчислення, пов'язані з многогранниками. При їх розв'язуванні (та запису розв'язання) можна користуватися такою схемою.

1. Обґрунтувати положення висоти многогранника.
2. Обґрунтувати, що просторові кути і просторові відстані позначені правильно.
3. Якщо розглядається переріз многогранника, то обґрунтувати його форму (якщо ця форма використовується для розв'язування).
4. Якщо розглядається комбінація многогранника й тіла обертання, то описати взаємне розміщення їхніх елементів.
5. На кожному кроці обчислень указати, з якого трикутника визначаємо елементи, і, якщо він прямокутний, пояснити, чому.

77. В основі піраміди  $SABC$  лежить прямокутний трикутник  $ABC$  з прямим кутом  $C$  і кутом  $B$ , що дорівнює  $\beta$ . Кожне бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть тангенс кута  $\varphi$  між площиною  $SBC$  і площиною основи піраміди. До відповіді запишіть значення  $\sqrt{3} \sin \beta \operatorname{tg} \varphi$ .

Розв'язання.

1. Оскільки всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи, то основою висоти піраміди буде центр кола, описаного навколо основи піраміди (табл. 74). Але в основі піраміди лежить прямокутний трикутник, тоді основою висоти  $SO$  піраміди буде точка  $O$  — середина

гіпотенузи  $AB$  (табл. 63), а кутом нахилу ребра  $SB$  до площини основи буде кут  $SBO$  (оскільки  $BO$  — проєкція  $SB$  на площину  $ABC$ ) (табл. 70); отже,  $\angle SBO = 60^\circ$  (рис. 14).

2. Проведемо в площині основи  $OM \perp BC$ , тоді  $SM \perp BC$  (за теоремою про три перпендикуляри). Отже,  $\angle SMO$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $BC$  (а оскільки він гострий, то це і є кут між площинами  $SBC$  і  $ABC$ ) (табл. 70).

3. Нехай  $AB = x$  ( $x > 0$ ), тоді  $OB = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$ . У прямокутному

трикутнику  $SOB$ :  $\angle SBO = 60^\circ$ , тоді  $SO = OB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ .

4. У прямокутному трикутнику  $OBM$ :  $\angle B = \beta$ , тоді  $OM = OB \sin \beta = \frac{x \sin \beta}{2}$ .

5. З прямокутного трикутника  $SMO$  ( $SO$  — висота піраміди):

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x \sin \beta}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \beta}.$$

Тоді вираз  $\sqrt{3} \sin \beta \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \sin \beta \frac{\sqrt{3}}{\sin \beta} = 3$ .

Відповідь: 3.

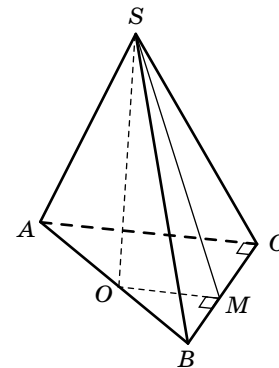


Рис. 14

78. Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено переріз під кутом  $60^\circ$  до його основи. Обчисліть площу  $S$  перерізу (у  $\text{см}^2$ ), якщо площина перерізу розташована на відстані 3 см від основи висоти конуса. До відповіді запишіть число  $\frac{S}{\sqrt{3}}$ .

Розв'язання.

1. Як відомо, переріз, що проходить через вершину конуса, — рівнобедрений трикутник (табл. 76). Нехай  $SO$  — висота конуса, а рівнобедрений трикутник  $SAB$  ( $SA = SB$ ) — заданий переріз (рис. 15). Проведемо в площині основи конуса  $OM \perp AB$ , тоді  $SM \perp AB$  (за теоремою про три перпендикуляри). Отже,  $\angle SMO$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $AB$  (а оскільки він гострий, то це і є кут між перерізом  $SAB$  і основою  $AOB$ ) (табл. 70) і за умовою  $\angle SMO = 60^\circ$ .

2. Оскільки  $AB \perp OM$  і  $AB \perp SM$ , то  $AB \perp \text{пл. } SMO$ , тоді  $\text{пл. } SMO \perp \text{пл. } SAB$  (тобто *площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута* — табл. 70). Проведемо в площині  $SMO$  перпендикуляр  $OK \perp SM$ , тоді  $OK \perp \text{пл. } SAB$ , тобто  $OK$  — відстань від основи висоти конуса до площини перерізу; за умовою  $OK = 3$  см.

3. З прямокутного трикутника  $OKM$ :  $OM = \frac{OK}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$  (см).

4. З прямокутного трикутника  $SMO$  ( $SO$  — висота конуса):  $SM = \frac{OM}{\cos 60^\circ} = 4\sqrt{3}$  (см).

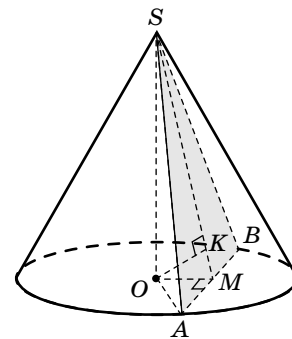


Рис. 15

5. З прямокутного трикутника  $OAM$ :  $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$  (см).  
 6. Тоді  $S_{\text{перерізу}} = S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SM = AM \cdot SM = 8\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>). Значення  $\frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8$ .

Відповідь: 8.

79. У правильній трикутній піраміді  $SABC$  кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює  $30^\circ$ , сторона основи дорівнює 9,  $SO$  — висота піраміди. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, що проходить через точку  $O$  паралельно ребрам  $SA$  і  $BC$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

80. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат  $ABCD$  зі стороною 6 см. Бічне ребро  $AA_1$  дорівнює 8 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину  $A$  перпендикулярно до прямої  $BA_1$  (у см<sup>2</sup>).

Відповідь: \_\_\_\_\_

81. У правильній чотирикутній піраміді  $SABCD$  ( $S$  — вершина) бічне ребро дорівнює 8, а сторона основи — 4. Знайдіть косинус кута  $\varphi$  між медіаною трикутника  $SDC$ , проведеною з вершини  $D$ , та середньою лінією трикутника  $ASC$ , що паралельна основі піраміди. До відповіді запишіть число  $\sqrt{3} \cos \varphi$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

82. Через вершину конуса з радіусом основи 8 см проведено переріз під кутом  $30^\circ$  до його висоти. Обчисліть площу  $S$  перерізу (у см<sup>2</sup>), якщо площина перерізу розташована на відстані 3 см від основи висоти конуса. До відповіді запишіть число  $S\sqrt{39}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

83. У пряму призму вписано циліндр, площа бічної поверхні якого дорівнює  $10\pi$ . Основа призми — ромб з кутом  $45^\circ$ . Відстань між віссю циліндра і діагоналлю бічної грані призми дорівнює  $\sqrt{2}$ . Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання.

1. Нехай  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — задана пряма призма, і в неї вписано циліндр з віссю  $OO_1$  (рис. 16, а). Тоді висота призми дорівнює висоті циліндра ( $H_{\text{призми}} = H_{\text{циліндра}} = OO_1 = AA_1$ ), основи циліндра вписані в основи призми (тоді точки  $O$  і  $O_1$  — точки перетину діагоналей ромбів основ). Отже, радіус основи циліндра дорівнює радіусу кола, вписаного в ромб з кутом  $45^\circ$ . У площині основи проведемо  $OM \perp AB$ , тоді  $OM = r_{\text{впис}} = R_{\text{цил}}$ .

2. Щоб одержати відстань між мимобіжними прямими  $OO_1$  і діагоналлю бічної грані  $AB_1$  використаємо властивість: відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між їх проекціями

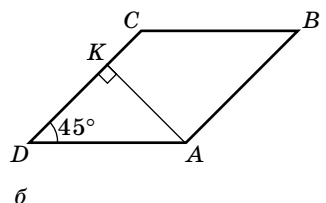
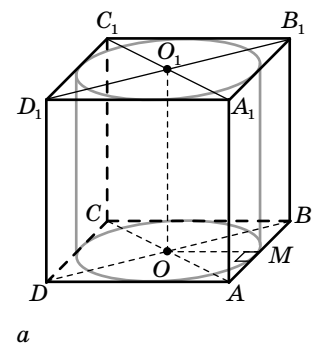


Рис. 16

на площину, перпендикулярну до однієї з цих прямих (табл. 71). Оскільки  $OO_1 \perp$  пл.  $ABCD$ , то спроекуємо ці прямі на площину  $ABCD$ . Пряма  $OO_1$  буде проектуватися в точку  $O$ , а пряма  $AB_1$  — у пряму  $AB$ . Тоді відстань між прямими  $OO_1$  і  $AB_1$  дорівнює відстані від точки  $O$  до прямої  $AB$ , тобто дорівнює  $OM$  ( $OM \perp AB$ ), отже,  $OM = \sqrt{2}$ . Таким чином,  $r_{\text{впис}} = R_{\text{цил}} = OM = \sqrt{2}$ .

3. Враховуючи, що  $S_{\text{бічна цил}} = 2\pi RH$ , одержуємо  $10\pi = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot H$ . Тоді  $H = \frac{5}{\sqrt{2}}$ .

4. У ромбі  $ABCD$  проведемо  $AK \perp CD$  (рис. 16, б). Оскільки діаметр вписаного кола дорівнює висоті ромба, то  $AK = 2OM = 2\sqrt{2}$ . З прямокутного трикутника  $ADK$  ( $\angle D = 45^\circ$  за умовою):  $AD = \frac{AK}{\sin 45^\circ} = 4$ . Тоді  $S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin 45^\circ = 8\sqrt{2}$  і  $V_{\text{призми}} = S_{ABCD} \cdot H = 8\sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 40$ .

Відповідь: 40.

84. Навколо правильної трикутної призми описаний циліндр. Площа його бічної поверхні дорівнює  $14\pi$ . Відстань між віссю циліндра і діагоналлю бічної грані призми становить  $2\sqrt{3}$ . Знайдіть об'єм  $V$  призми. До відповіді запишіть число  $\frac{V}{\pi\sqrt{3}}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

85. У пряму призму, в основі якої лежить ромб з кутом  $45^\circ$ , вписаний циліндр. Відстань між віссю циліндра і діагоналлю бічної грані призми дорівнює  $5\sqrt{2}$ . Знайдіть об'єм призми, якщо площа повної поверхні циліндра дорівнює  $106\pi$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

86. Висота правильної чотирикутної призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 8, а сторона основи становить  $6\sqrt{2}$ . Знайдіть відстань від вершини  $A$  до площини  $A_1 BD$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

87. У правильній трикутній призмі  $ABCA_1 B_1 C_1$  діагональ бічної грані нахилена до площини основи призми під кутом  $\varphi$ . Знайдіть тангенс кута  $x$  нахилу площини  $A_1 BC$  до площини основи призми. До відповіді запишіть число  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} x$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

88. Кінці відрізка  $BC$  лежать на колах двох основ циліндра. Радіус основи циліндра дорівнює 25, довжина відрізка  $BC$  становить  $14\sqrt{2}$ , а кут між прямою  $BC$  і площиною основи циліндра дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть відстань між віссю циліндра та паралельною до неї площиною, яка проходить через точки  $B$  і  $C$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

## Розділ 6

**ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ****Тренувальний тест зовнішнього незалежного оцінювання  
з математики за специфікацією 2009 р.****Частина 1**

Завдання 1–20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку А (на с. 196).

1. Яке з наведених чисел ділиться на 9 без остачі?

А	Б	В	Г	Д
237 515	438 642	721 384	564 873	234 721

2. Якщо  $a = \frac{b}{c^2}$  (де  $c > 0$ ), то  $c =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{ab}$

3. Ціну товару збільшили на 100%, а потім нову ціну зменшили на 50%. Як змінилася початкова ціна товару?

А	Б	В	Г	Д
Залишилася незмінною	Збільшилася в 1,5 разу	Збільшилася в 2 рази	Зменшилася в 2 рази	Зменшилася в 1,5 разу

4. Дано числа  $2,3$ ;  $\sqrt{10}$ ;  $2\frac{1}{3}$ . Розташуйте їх у порядку спадання.

А	Б	В	Г	Д
$2,3$ ; $\sqrt{10}$ ; $2\frac{1}{3}$	$2,3$ ; $2\frac{1}{3}$ ; $\sqrt{10}$	$2\frac{1}{3}$ ; $\sqrt{10}$ ; $2,3$	$\sqrt{10}$ ; $2\frac{1}{3}$ ; $2,3$	$\sqrt{10}$ ; $2,3$ ; $2\frac{1}{3}$

5. Якщо  $\sin^2 x = 0,2$ , то  $5\cos^2 x - 1$  дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
3	0	-0,9	-0,6	Інша відповідь

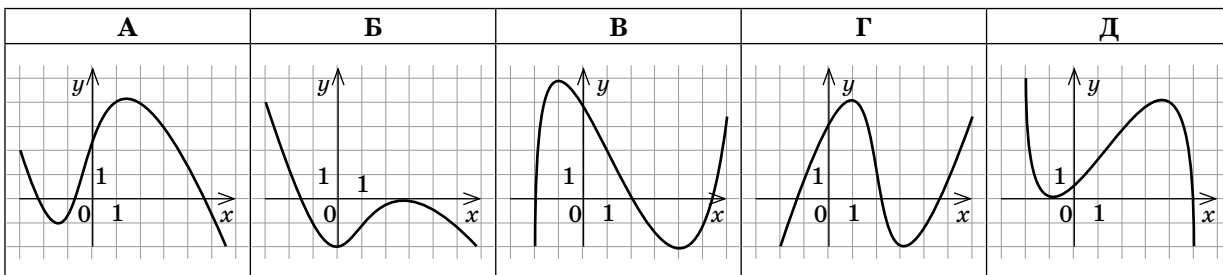
6. Знайдіть значення виразу  $\frac{a^3 - 0,3a^2}{a^2 - 0,09}$  при  $a = 0,7$ .

А	Б	В	Г	Д
0,7	0,49	-0,7	-0,49	Інша відповідь

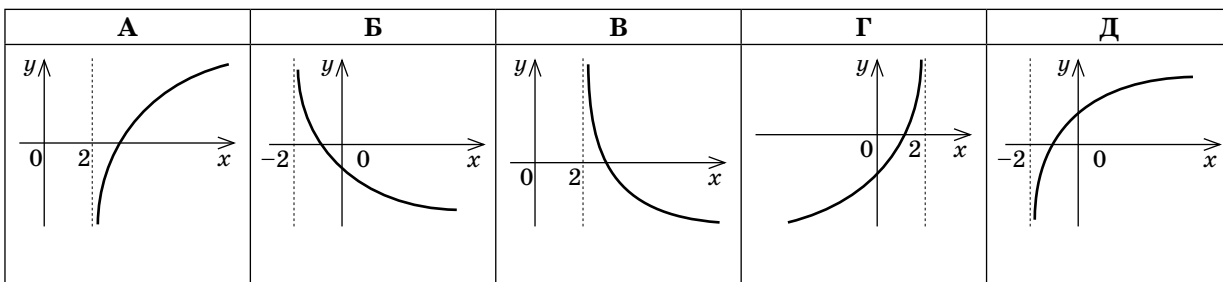
7. У геометричній прогресії  $b_2 = 6$ ,  $b_3 = 12$ . Знайдіть суму перших шести членів прогресії.

А	Б	В	Г	Д
168	180	186	189	381

8. Укажіть рисунок, на якому функція, задана графіком, спадає на проміжку  $[-1; 4]$ .



9. На одному з рисунків наведено графік функції  $y = \log_{0,5}(x-2)$ . Укажіть цей рисунок.





10. Розв'яжіть рівняння  $2\sqrt{3} \cos x = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	Рівняння коренів не має

11. Розв'яжіть нерівність  $\log_{0,3} x > \log_{0,3} 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(-\infty; 3]$	$(0; 3)$	$(3; +\infty)$	$[3; +\infty)$

12. Скількома способами з цифр 1; 2; 3; 5 можна скласти парне чотирицифрове число, якщо цифри в числі не можуть повторюватися?

А	Б	В	Г	Д
1	12	4	6	24

13. У ящику міститься 8 пофарбованих деталей і 4 непофарбовані. Знайдіть імовірність того, що навмання витягнута деталь буде пофарбована.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

14. Обчисліть значення похідної функції  $f(x) = \ln x + 10x^2 + 2$  при  $x = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
1	5	6	21	23

15. У прямокутному трикутнику  $ABC$ , у якому  $\angle A = 25^\circ$ , з вершини прямого кута  $C$  провели висоту  $CD$  і медіану  $CM$ . Знайдіть градусну міру кута  $MCD$ .

А	Б	В	Г	Д
$25^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$65^\circ$

16. Знайдіть площу паралелограма, якщо його менша діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а висота, проведена з вершини тупого кута паралелограма, ділить більшу сторону на відрізки 9 см і 16 см.

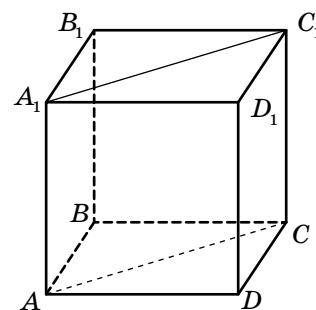
А	Б	В	Г	Д
450 см <sup>2</sup>	300 см <sup>2</sup>	200 см <sup>2</sup>	150 см <sup>2</sup>	100 см <sup>2</sup>

17. У трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) діагоналі перетинаються в точці  $O$ ,  $AD = 8$ ,  $BC = 2$ . Знайдіть відношення  $AO : OC$ .

А	Б	В	Г	Д
1:2	1:4	1:8	2:1	4:1

18. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром 2. Знайдіть відстань між площиною  $AA_1 C_1 C$  і прямою  $DD_1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	2	1



19. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 6 і утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$9\pi$	$18\pi$	$27\pi$	$36\pi$	$45\pi$

20. Сфера проходить через вершини квадрата з діагоналлю 8 см. Відстань від центра сфери до площини квадрата дорівнює 3 см. Знайдіть радіус сфери.

А	Б	В	Г	Д
8 см	4 см	3 см	6 см	5 см

**Частина 2**

Розв'яжіть завдання 21–30. Одержану відповідь запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу в зошит і бланк А (на с. 196).

21. Визначте кількість цілих розв'язків нерівності  $\log_5 x + \log_5 (x - 20) < 3$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

22. Знайдіть (у градусах) величину кута  $C$  трикутника  $ABC$ , знаючи декартові координати його вершин:  $A(5; -\sqrt{3})$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; -\sqrt{3})$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

23. Після проведення контрольної роботи з математики в одному з класів були отримані такі результати:

Оцінка (бал)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів, які отримали таку оцінку	2	3	2	2	3	2	1	2	2	1

Знайдіть середню оцінку за контрольну роботу (тобто середнє арифметичне всіх оцінок, одержаних всіма учнями класу).

Відповідь: \_\_\_\_\_

24. Укажіть число цілих розв'язків нерівності  $\frac{x-3}{(x-1)^2(x-5)} > 0$  на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

25. Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - |x| = a \end{cases}$  має точно 3 розв'язки.

Відповідь: \_\_\_\_\_

26. Знайдіть розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} \log_2(x-y) = 0, \\ 5^x + 5^y = 3750. \end{cases}$  У відповідь запишіть добуток  $x_0 y_0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

27. Знайдіть найбільше значення функції  $y = \frac{30}{\log_{0,2}(-x^2 + 6x - 8,96)}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

28. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій  $y = x^2 - 4x + 5$  і  $y = 5 - x$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

29. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро становить 10 см, а діагональ основи дорівнює  $12\sqrt{2}$  см.

Відповідь: \_\_\_\_\_

30. В основі піраміди лежить рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом  $6\sqrt{2}$ . Бічні грані піраміди, які проходять через катети основи, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до основи під кутом  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.

Відповідь: \_\_\_\_\_

### Частина 3

Розв'язання завдань 31–33 повинні мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями.

31. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює  $a$  і нахилене під кутом  $60^\circ$  до площини основи піраміди. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через сторону основи під кутом  $30^\circ$  до площини основи піраміди.

32. Побудуйте графік функції  $f(x) = \sqrt{x+6} - 4\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}$ .

33. Розв'яжіть нерівність  $|\log_2 x| - |2\log_2 x - 2| > \log_2^2 x$ .

# БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ (за специфікацією 2009 р.)

## Частина 1 та частина 2

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 21—30 правильну відповідь записуйте, урахувавши положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак «мінус» записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

**Наприклад:**

**правильно** записане число 2 матиме такий вигляд: 

		2			
			,		

 чи такий: 

		2			
			,		

**правильно** записане число 2,5 матиме такий вигляд: 

		2			
			,		5

**правильно** записане число –2,05 матиме такий вигляд: 

		–			
				2	
					,
					0
					5

**правильно** записане число –102,125 матиме такий вигляд: 

		–			
				2	
					,
					1
					2
					5

**Неправильно** записане число 2,5 має такий вигляд: 

		2			
			,		5

 чи такий: 

		2			
			,		5

 чи такий: 

2					

У завданнях 1—20 правильну відповідь позначайте тільки так:

	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Увага!** Приклад написання цифр для заповнення бланка відповідей: 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

У завданнях 21—30 відповідь записуйте тільки десятковим дробом, урахувавши положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці.

21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	27	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	29	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	26	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	28	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	30	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Місце виправлення помилкової відповіді

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть його номер та нову відповідь у відповідних клітинках.

Завдання 1—20

Номер завдання	А	Б	В	Г	Д
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Завдання 21—30

Номер завдання						,					
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Тренувальний тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики за специфікацією 2010 р.

Завдання 1–25 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку А (с. 203). Не робіть інших позначок — комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки.

1. Коров'яче молоко містить 5 % вуглеводів. Скільки всього вуглеводів (у г) міститься в 500 г молока?

А	Б	В	Г	Д
2,5 г	5 г	25 г	125 г	250 г

2. Знайдіть координати вектора  $\overline{AB}$ , якщо  $A(-3; 2; 1)$ ,  $B(-4; -5; 6)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\overline{AB}(1; 7; -5)$	$\overline{AB}(-1; -7; 5)$	$\overline{AB}(-1; 7; -5)$	$\overline{AB}(1; -7; -5)$	$\overline{AB}(-1; -7; -5)$

3. Задано арифметичну прогресію  $(a_n)$ , для якої третій член  $a_3 = 17$  і різниця  $d = -2$ . Знайдіть  $a_1$ .

А	Б	В	Г	Д
11	13	15	19	21

4. Площа круга дорівнює  $25\pi$  см<sup>2</sup>. Знайдіть довжину кола (у см), що обмежує цей круг.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi$ см	$5\pi$ см	$10\pi$ см	$20\pi$ см	$50\pi$ см

5. Відомо, що  $b < c$ . Серед наведених нерівностей укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$-3b < -3c$	$5b > 5c$	$\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$	$b - 5 > c - 5$	$5 - b > 5 - c$

6. Обчисліть  $2,9 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot 6,2$ .

А	Б	В	Г	Д
1,03	1,3	13	23	2,3

7. Спростіть вираз  $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{10}}}$ , якщо  $a > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a}$	$\sqrt[5]{a^2}$	$\sqrt[10]{a}$	$a^2$	$\sqrt[4]{a}$

8. Скільки всього граней у призми, яка має 18 ребер?

А	Б	В	Г	Д
5	6	7	8	9

9. Протягом третьої чверті учень отримав такі оцінки з геометрії: 5, 7, 9, 8, 6, 9, 10, 8, 9. Знайдіть моду цього ряду даних.

А	Б	В	Г	Д
5	6	7	8	9

10. Обчисліть  $64^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{3}{4}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	-1	5	23	-23

11. Знайдіть площу поверхні куба, об'єм якого дорівнює  $27 \text{ см}^3$ .

А	Б	В	Г	Д
9	18	36	54	72

12. Якщо  $\log_5 7 = a$ , то  $\log_{25} 49 =$

А	Б	В	Г	Д
$2a$	$a^2$	$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{a}$	$a$

13. Розв'яжіть нерівність  $\left(\frac{1}{7}\right)^x < 1$ .

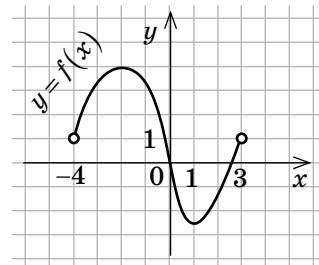
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(7; +\infty)$

14. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо його радіус дорівнює 6 см, а висота — 8 см.

А	Б	В	Г	Д
$60\pi \text{ см}^2$	$96\pi \text{ см}^2$	$36\pi \text{ см}^2$	$30\pi \text{ см}^2$	$48\pi \text{ см}^2$

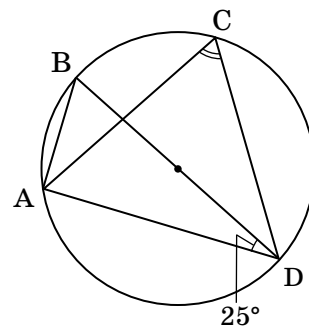
15. Функція  $y = f(x)$  визначена на всій числовій прямій і є періодичною з найменшим додатним періодом 9. На рисунку зображено графік цієї функції на відрізку  $[-4; 3]$ . Обчисліть  $f(19)$ .

А	Б	В	Г	Д
-3	0	1	3	4



16. Точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать на колі.  $BD$  — діаметр цього кола (див. рисунок). Знайдіть величину кута  $ACD$ , якщо  $\angle ADB = 25^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$25^\circ$	$35^\circ$	$65^\circ$	$55^\circ$	$75^\circ$



17. У класі 10 дівчат і 20 хлопців. Яка ймовірність того, що перший учень, якого викличуть до дошки на уроці математики, буде хлопцем?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{30}$

18. У магазині придбали 14 однакових зошитів і кілька ручок по 7 грн за кожну. Яке з наведених чисел може виражати загальну вартість покупки (у грн), якщо зошит коштує ціле число гривень?

А	Б	В	Г	Д
24	25	26	27	28

19. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння  $2\cos x = -1$ .

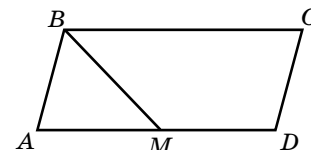
А	Б	В	Г	Д
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$



20. Знайдіть відстань від точки  $A(-6; 2; 8)$  до осі  $Oy$ .

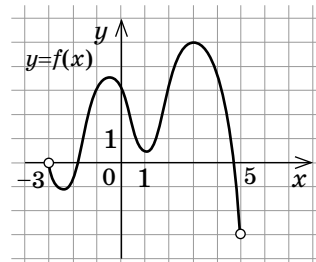
А	Б	В	Г	Д
10	8	6	$2\sqrt{10}$	$2\sqrt{17}$

21. Бісектриса тупого кута  $B$  паралелограма  $ABCD$  ділить сторону  $AD$  на відрізки  $AM=7$  см і  $MD=8$  см (див. рисунок). Знайдіть периметр паралелограма  $ABCD$ .



А	Б	В	Г	Д
15	30	37	44	60

22. На рисунку зображено графік функції  $y=f(x)$ , яка визначена на проміжку  $(-3; 5)$ . У кожній точці цього проміжку існує похідна  $y=f'(x)$ . Скільки коренів має рівняння  $f'(x)=0$  на проміжку  $(-3; 5)$ ?



А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

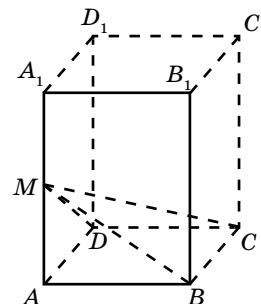
23. Скільки всього різних чотирьохцифрових чисел можна утворити з цифр 0, 2, 4, 6 (у числах цифри не повинні повторюватися)?

А	Б	В	Г	Д
4	6	12	18	24

24. У паралелограмі  $ABCD$ :  $AB=3$  см,  $BD=4$  см,  $\angle ABD=60^\circ$ . Обчисліть довжину діагоналі  $AC$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{7}$ см	$2\sqrt{7}$ см	$\sqrt{19}$ см	$2\sqrt{19}$ см	$2\sqrt{10}$ см

25. Об'єм прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює  $36$  см<sup>3</sup>. Точка  $M$  – середина ребра  $AA_1$  (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди  $MA BCD$ .



А	Б	В	Г	Д
3	4	6	12	18

Завдання 26–28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою. Відповіді запишіть у зошиті та бланку А (с. 203): поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види вашого запису в бланку А комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

26. Установіть відповідність між виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д).

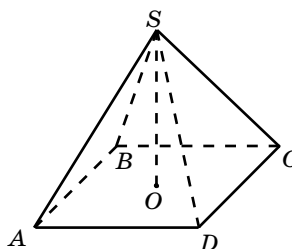
1 $(4a+3b)^2$	А $16a^2 - b^2$		А	Б	В	Г	Д
2 $(4a-b)(b+4a)$	Б $9b^2 + 24ab + 16a^2$	1					
3 $(a-4b)^2$	В $3a^2 + 11ab - 4b^2$	2					
4 $(a+4b)(3a-b)$	Г $16a^2 + 12ab + 9b^2$	3					
	Д $16b^2 - 8ab + a^2$	4					

27. Установіть відповідність між указаними функціями (1–4) та перетвореннями (А–Д), за допомогою яких графіки цих функцій можна отримати із графіка функції  $y = \lg x$ .

1 $y = \lg(x+5)$	А Симетрія відносно осі $Ox$		А	Б	В	Г	Д
2 $y = \lg(-x)$	Б Симетрія відносно осі $Oy$	1					
3 $y = -\lg x$	В Паралельне перенесення вздовж осі $Ox$	2					
4 $y = \lg x + 5$	Г Паралельне перенесення вздовж осі $Oy$	3					
	Д Розтяг або стиск уздовж осі $Ox$	4					

28. На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду  $SABCD$ , усі ребра якої рівні.  $SO$  — висота піраміди. Установіть відповідність між заданими кутами (1–4) та їхніми градусними мірами (А–Д).

- |                               |              |
|-------------------------------|--------------|
| 1 Кут між прямими $SC$ і $AB$ | А $0^\circ$  |
| 2 Кут між прямими $SA$ і $BD$ | Б $30^\circ$ |
| 3 Кут між прямими $AD$ і $BC$ | В $45^\circ$ |
| 4 Кут між прямими $SO$ і $SB$ | Г $60^\circ$ |
|                               | Д $90^\circ$ |



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Розв'яжіть завдання 29–36. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку А (с. 203). Пам'ятайте, що відповіді у бланку А необхідно записувати лише десятковими дробами або цілими числами.

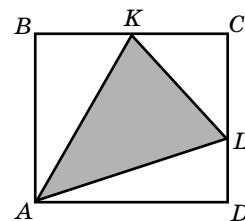
29. Знайдіть значення виразу  $\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$ , якщо  $\alpha = 75^\circ$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

30. Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2 - 19x + 20}{x^2 - 17x + 70} < 0$ . У відповідь запишіть кількість цілих чисел, що задовольняють цю нерівність. Якщо кількість таких чисел нескінченна, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь: \_\_\_\_\_

31. У квадраті  $ABCD$ :  $AB = 6$  см,  $K$  — середина сторони  $BC$ , а  $L$  — точка на стороні  $CD$ , причому  $CL = 2LD$  (див. рисунок). Знайдіть площу трикутника  $AKL$  (у  $\text{см}^2$ ).



Відповідь: \_\_\_\_\_

32. Знайдіть найбільше значення функції  $y = 27x - x^3$  на відрізку  $[0; 4]$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

33. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^4$ ,  $y = 16$ ,  $x = 0$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

34. Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 64, \\ x^2 + (y-1)^2 = a^2 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

Відповідь: \_\_\_\_\_

35. Розв'яжіть рівняння  $|3 \cdot 2^x - 12| - |2^x - 1| = -3$ . Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть суму коренів.

Відповідь: \_\_\_\_\_

36. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3. Бічне ребро піраміди нахилене до площини її основи під кутом  $30^\circ$ . Обчисліть площу  $S$  сфери, описаної навколо піраміди.

У відповідь запишіть значення  $\frac{S}{\pi}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

# БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ (за специфікацією 2010 р.)

# A

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 29–36 правильну відповідь записуйте, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак «мінус» записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

Наприклад: правильно записане число 2 матиме такий вигляд:

			2		

чи такий:

			2	,	0		

правильно записане число 2,5 матиме такий вигляд:

			2	,	5		

правильно записане число –2,05 матиме такий вигляд:

			-	2	,	0	5		

Неправильно записане число 2,5 має такий вигляд:

2				,	5		

чи такий:

			2	,			5

У завданнях 1–28 правильну відповідь позначайте тільки так:

	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д						
1						6						11						16						21					
2						7						12						17						22					
3						8						13						18						23					
4						9						14						19						24					
5						10						15						20						25					

	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
26	1					27	1					28	1				
	2						2						2				
	3						3						3				
	4						4						4				

Приклад написання цифр: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 –

У завданнях 29–36 відповідь записуйте цифрами, враховуючи положення коми.

29				,	31				,	33				,	35				,
30				,	32				,	34				,	36				,

### Місце виправлення помилкової відповіді

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть номер завдання і нову відповідь у відповідних клітинках.

Номер завдання	Завдання 1–25					Номер завдання	Завдання 26–28					Номер завдання	Завдання 29–36				
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д						
							1										
							2										
							3										
							4										

## Тренувальний тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики за специфікацією 2011 р.

Завдання 1–25 мають по п'ять варіантів відповідей, серед яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку А (с. 211). Не робіть інших позначок — комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки.

1. Розв'яжіть рівняння  $\frac{2}{x} = 5$ .

А	Б	В	Г	Д
0,1	10	2,5	0,4	-3

2. Учитель роздав учням класу 72 зошити. Кожен учень отримав однакову кількість зошитів. Якому з поданих нижче чисел може дорівнювати кількість учнів у цьому класі?

А	Б	В	Г	Д
7	9	10	11	14

3. Спростіть вираз  $0,8b^9 : 8b^3$ .

А	Б	В	Г	Д
$0,1b^6$	$10b^6$	$6,4b^{12}$	$0,1b^3$	$10b^3$

4. Укажіть лінійну функцію, графік якої паралельний вісі абсцис і проходить через точку  $A(-2; 3)$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{3}{2}x$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$y = 3$

5. Доберіть таке закінчення речення, щоб утворилося правильне твердження.

«Сума квадратів катетів прямокутного трикутника дорівнює...»

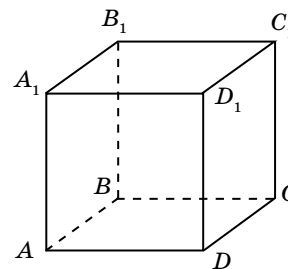
А	Б	В	Г	Д
гіпотенузі	квадрату суми катетів	квадрату гіпотенузи	добутку катетів	подвійному добутку катетів

6. Обчисліть:  $\log_2 \frac{1}{8} + \log_5 25$ .

А	Б	В	Г	Д
2	-1	5	$\lg \frac{25}{8}$	$\log_7 25 \frac{1}{8}$

7. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Серед поданих нижче прямих укажіть таку, що утворює з  $CD_1$  пару мимобіжних прямих.

А	Б	В	Г	Д
$A_1 B$	$C_1 D$	$CB_1$	$AB$	$CD$

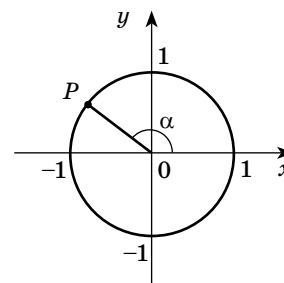


8. Журнал коштував 25 грн. Через два місяці цей самий журнал став коштувати 21 грн. На скільки відсотків знизилася ціна журналу?

А	Б	В	Г	Д
4 %	$\frac{4}{21} \cdot 100 \%$	$\frac{25}{21} \cdot 100 \%$	84 %	16 %

9. На одиничному колі зображено точку  $P(-0,8; 0,6)$  і кут  $\alpha$  (див. рисунок). Визначте  $\cos \alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
-0,8	0,6	0,8	-0,6	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



10. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного десятикутника.

А	Б	В	Г	Д
$18^\circ$	$36^\circ$	$72^\circ$	$144^\circ$	$162^\circ$

11. Спростіть вираз  $a - |a|$ , якщо  $a < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$2a$	$a$	0	$-a$	$-2a$

12. Об'єм кулі дорівнює  $36\pi$  см<sup>3</sup>. Знайдіть її діаметр.

А	Б	В	Г	Д
3 см	24 см	6 см	18 см	12 см

13. Визначте знаменник геометричної прогресії  $(b_n)$ , якщо  $b_9 = 24$ ,  $b_6 = -\frac{1}{9}$ .

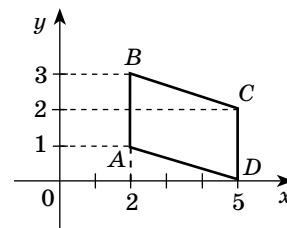
А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	3	6	-6

14. Розв'яжіть нерівність  $\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$

15. Обчисліть площу чотирикутника  $ABCD$  (див. рисунок), сторони  $AB$  і  $CD$  якого паралельні вісі  $Oy$ .

А	Б	В	Г	Д
10	5	3	6	7

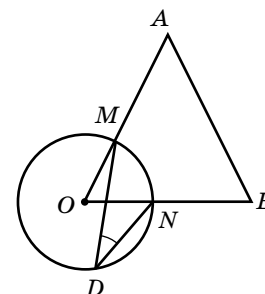


16. Якому з наведених нижче проміжків належить корінь рівняння  $5^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$ ?

А	Б	В	Г	Д
$(-3; -2]$	$(-2; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 3]$

17. На рисунку зображено коло з центром у точці  $O$  і рівносторонній трикутнику  $AOB$ , який перетинає коло в точках  $M$  і  $N$ . Точка  $D$  належить колу. Знайдіть градусну міру кута  $MDN$ .

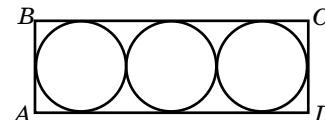
А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°



18. Функція  $y = f(x)$  є спадною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$f(1) > f(-1)$	$f(1) < f(8)$	$f(1) > f(0)$	$f(-1) < f(0)$	$f(1) > f(10)$

19. У прямокутник  $ABCD$  вписано три круги того самого радіуса (див. рисунок). Визначте довжину сторони  $BC$ , якщо загальна площа кругів дорівнює  $3\pi$ .



А	Б	В	Г	Д
2	3	6	9	18

20. О шостій годині ранку було визначено температуру на десяти метеостанціях. Отримані дані відображені в таблиці.

Температура (у градусах)	1	3	4	$x$
Кількість метеостанцій	2	3	4	1

За даними таблиці визначте  $x$ , якщо середнє арифметичне всіх виміряних температур дорівнює  $3,5^\circ$ .

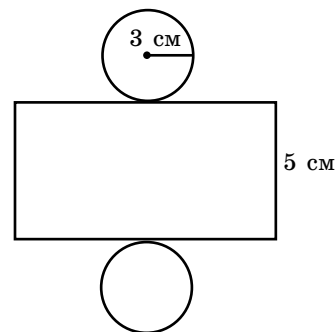
А	Б	В	Г	Д
5	6	7	8	9

21. У трикутнику  $ABC$ :  $AB = 31$  см,  $BC = 15$  см,  $AC = 26$  см. Пряма  $a$ , паралельна стороні  $AB$ , перетинає сторони  $BC$  і  $AC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Обчисліть периметр трикутника  $MNC$ , якщо  $MC = 5$  см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

22. На рисунку зображено розгортку циліндра. Знайдіть його об'єм.

А	Б	В	Г	Д
$9\pi$ см <sup>3</sup>	$15\pi$ см <sup>3</sup>	$30\pi$ см <sup>3</sup>	$36\pi$ см <sup>3</sup>	$45\pi$ см <sup>3</sup>



23. Розв'яжіть нерівність  $\log_{0,5}(x-1) > 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1; 1,25)$	$(2; +\infty)$	$(1,25; +\infty)$	$(0; 0,25)$	$(-\infty; 1,25)$



24. Функція  $F(x) = 6\sin(2x) - 1$  є первісною функції  $f(x)$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ .

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>
$f(x) = -12\cos(2x)$	$f(x) = 6\cos(2x)$	$f(x) = 12\cos(2x)$
<b>Г</b>		<b>Д</b>
$f(x) = -3\cos(2x) - x + C$		$f(x) = -6\cos(2x) - x + C$

25. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є прямокутник, площа якого дорівнює  $40 \text{ см}^2$ . Периметр основи призми дорівнює  $20\sqrt{2} \text{ см}$ . Визначте висоту призми.

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$\sqrt{2} \text{ см}$	$2\sqrt{2} \text{ см}$	$4 \text{ см}$	$1 \text{ см}$	$2 \text{ см}$

Завдання 26–28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою. Відповіді запишіть у зошит та бланку А (с. 211): поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види вашого запису в бланку А комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

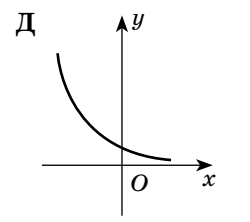
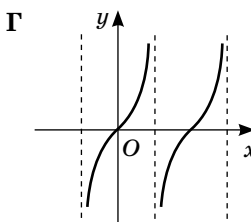
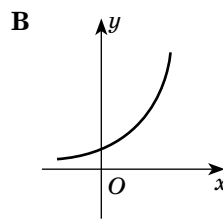
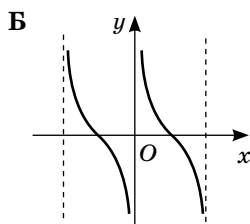
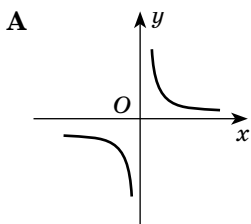
26. Установіть відповідність між функціями (1–4) та ескізами їхніх графіків (А–Д).

1  $y = \text{tg } x$

2  $y = \text{ctg } x$

3  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4  $y = \frac{1}{x}$



	<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
<b>1</b>					
<b>2</b>					
<b>3</b>					
<b>4</b>					



32. Двоє робітників, працюючи разом, можуть скосити траву на ділянці за 2 год 6 хв. Скільки часу (у год) витратить на скошування трави на цій ділянці другий робітник, працюючи самостійно, якщо йому потрібно на виконання цього завдання на 4 год більше, ніж першому робітникові?

Відповідь: \_\_\_\_\_

33. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основами 18 см і 8 см, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса  $S_{\text{біч}}$  (у  $\text{см}^2$ ), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом  $60^\circ$ .

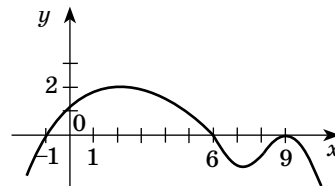
У відповіді запишіть значення  $\frac{S_{\text{біч}}}{\pi}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

34. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ , яка визначена на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і має лише три нулі. Розв'яжіть систему

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ x^2 + x - 6 > 0. \end{cases}$$

У відповіді запишіть СУМУ всіх цілих розв'язків системи.



Відповідь: \_\_\_\_\_

35. Знайдіть найменше значення  $a$ , при якому має розв'язки рівняння

$$\frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 6 - 5a - 2a^2.$$

Відповідь: \_\_\_\_\_

# БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ (за специфікацією 2011 р.)

# A

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 29–35 правильну відповідь записуйте, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак «мінус» записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

**Наприклад:** правильно записане число 2 матиме такий вигляд: 

			2		

 чи такий: 

			2		0		

правильно записане число 2,5 матиме такий вигляд: 

			2	,	5		

правильно записане число –2,05 матиме такий вигляд: 

			–	2	,	0	5		

**НЕ**правильно записане число 2,5 має такий вигляд: 

2						5		

 чи такий: 

			2				5		

У завданнях 1–28 правильну відповідь позначаєте тільки так:

	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д						
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
26	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	27	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	28	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Приклад написання цифр: 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

У завданнях 29–35 відповідь записуйте цифрами, враховуючи положення коми.

29	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	31	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	33	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	35	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,
30	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	32	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	34	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,

### Місце виправлення помилкової відповіді

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть номер завдання і нову відповідь у відповідних клітинках.

Номер завдання	Завдання 1–25	Номер завдання	Завдання 26–28	Номер завдання	Завдання 29–35						
<input type="checkbox"/>	А Б В Г Д	<input type="checkbox"/>	А Б В Г Д	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	,	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Тренувальний тест 1 зовнішнього незалежного оцінювання з математики за специфікацією 2012 р.

Завдання 1–20 мають по п'ять варіантів відповідей, серед яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку А (с. 218). Не робіть інших позначок — комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки.

1. Пісочниця для дитячого майданчика має форму правильного шестикутника, довжина сторони якого виражається цілим числом метрів. Яким числом метрів може виражатися периметр цієї пісочниці?

А	Б	В	Г	Д
10 м	14 м	16 м	18 м	20 м

2. Обчисліть значення виразу  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ .

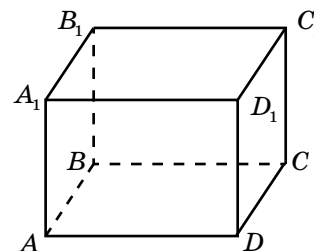
А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

3. Знайдіть суму кутів опуклого п'ятикутника.

А	Б	В	Г	Д
$180^\circ$	$360^\circ$	$480^\circ$	$540^\circ$	$900^\circ$

4. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у якому  $AB=5$  см,  $AD=6$  см,  $AA_1=8$  см. Знайдіть відстань від точки  $C_1$  до площини  $A_1 AB$ .

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	8 см	$\sqrt{61}$ см	10 см



5. Знайдіть довжину дуги кола, якій відповідає центральний кут  $20^\circ$ , якщо радіус кола дорівнює 18 м.

А	Б	В	Г	Д
$0,5\pi$ м	$\pi$ м	$2\pi$ м	$10\pi$ м	$18\pi$ м

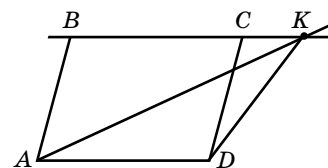
6. Знайдіть значення виразу  $|x-3| - |2x+5|$  при  $x = -4$ .

А	Б	В	Г	Д
-10	-6	-4	4	10

7. Розв'яжіть рівняння  $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) = -2$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{11}{4}$	2	-5	1	-1

8. Площа трикутника  $AKD$  (див. рисунок) дорівнює  $120 \text{ см}^2$ . Пряма  $BC$  проходить через точку  $K$  і паралельна прямій  $AD$ . Знайдіть площу паралелограма  $ABCD$ .



А	Б	В	Г	Д
$120 \text{ см}^2$	$180 \text{ см}^2$	$240 \text{ см}^2$	$360 \text{ см}^2$	Визначити неможливо

9. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження.  
Центром будь-якого вписаного у коло трикутника є...

А	Б	В	Г	Д
точка перетину бісектрис	точка перетину медіан	точка перетину висот	середина найбільшої сторони	точка перетину серединних перпендикулярів

10. Обчисліть  $\frac{\log_7 27}{\log_7 3}$ .

А	Б	В	Г	Д
2	$\log_7 3$	$\log_7 9$	4	3

11. Знайдіть кількість ребер семикутної піраміди.

А	Б	В	Г	Д
7	8	9	14	21

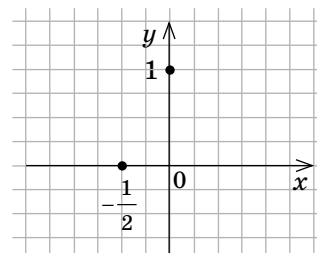
12. Шкільний глобус має форму кулі діаметром 30 см. Знайдіть його об'єм.

А	Б	В	Г	Д
$900\pi \text{ см}^3$	$3600\pi \text{ см}^3$	$4500\pi \text{ см}^3$	$9000\pi \text{ см}^3$	$13500\pi \text{ см}^3$

13. Укажіть рівняння, яке НЕ МАЄ коренів.

А	Б	В	Г	Д
$\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\operatorname{ctg} x = \sqrt{5}$	$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\operatorname{tg} x = \sqrt{5}$

14. Укажіть функцію, графік якої проходить через дві точки, зображені на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$y = -x^2 + 1$	$y = -4x^2 + 1$	$y = -2x^2 + 1$	$y = -x^2 - 1$	$y = -4x^2 - 1$

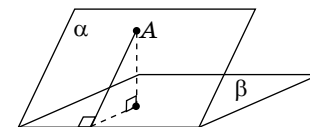
15. Розв'яжіть нерівність  $2^x \cdot 4^{3-x} \leq 16$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2]$	$[2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -2]$	$[-2; +\infty)$

16. Для виготовлення двокольорових ручок на фабриці використовували червоні, жовті, зелені та сині стрижні. Скільки різних видів двокольорових ручок випускала фабрика?

А	Б	В	Г	Д
2	4	5	6	8

17. Кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$  дорівнює  $30^\circ$ . Точка А, яка лежить у площині  $\alpha$ , віддалена від площини  $\beta$  на 18 см (див. рисунок). Знайдіть відстань від точки А до лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ .



А	Б	В	Г	Д
9 см	18 см	$18\sqrt{3}$ см	$9\sqrt{3}$ см	36 см

18. Укажіть загальний вигляд первісної функції  $f(x) = 6x^2$ .

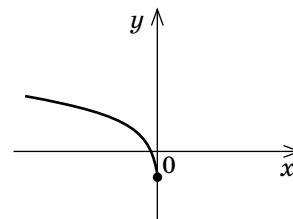
А	Б	В	Г	Д
$12x$	$12x + C,$ $C \in \mathbf{R}$	$2x^3$	$2x^3 + C,$ $C \in \mathbf{R}$	$6x^3 + C,$ $C \in \mathbf{R}$

19. Укажіть номер члена арифметичної прогресії 5; 6,2; 7,4; ... , який дорівнює 11.

А	Б	В	Г	Д
5	6	8	10	11

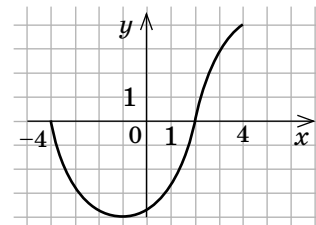
20. На рисунку зображено графік функції  $y = \sqrt{ax} + b$ . Укажіть знаки параметрів  $a$  і  $b$ .

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ b = 0 \end{cases}$



Завдання 21–24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою. Відповіді запишіть у зошиті та бланку А (с. 218): поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види вашого запису в бланку А комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

21. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ , заданої на проміжку  $[-4; 4]$ . Установіть відповідність між властивістю функції  $f(x)$  (1–4) та проміжком (А–Д).



- |  |              |
|--|--------------|
| 1 Функція зростає на проміжку  | А $[-4; 2]$  |
| 2 Функція спадає на проміжку   | Б $[-1; 4]$  |
| 3 Якщо аргумент приймає всі значення із проміжку $[-4; 2]$ , то відповідні значення функції утворюють проміжок | В $[-4; -1]$ |
| 4 Функція приймає недодатні значення тільки на проміжку  | Г $[-4; 4]$  |
|  | Д $[-4; 0]$  |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

22. Установіть відповідність між зображенням вектора на рисунку (1–4) та його можливими координатами (А–Д).

- |   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

- |              |
|--------------|
| А $(2; 0)$   |
| Б $(0; -2)$  |
| В $(-2; -2)$ |
| Г $(-2; 0)$  |
| Д $(-2; 2)$  |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					



23. Установіть відповідність між сформульованими задачами (1–4) та розв’язками (А–Д).

- |   |  |   |       |
|---|--|---|-------|
| 1 | Скільки відсотків складає 5 від 20?              | А | 20 %  |
| 2 | На скільки відсотків 30 більше за 15?            | Б | 25 %  |
| 3 | На скільки відсотків 15 менше за 30?             | В | 10 %  |
| 4 | Скільки відсотків складає 12, якщо 3 складає 5%? | Г | 50 %  |
|   |  | Д | 100 % |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

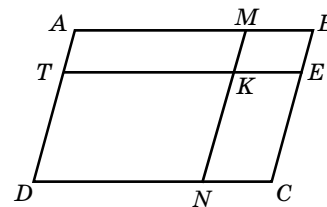
24. Установіть відповідність між заданими многогранниками (1–4) та площами їх повних поверхонь (А–Д).

- |   |   |   |     |
|---|---|---|-----|
| 1 | Куб із ребром 4   | А | 144 |
| 2 | Прямокутний паралелепіпед із вимірами 3, 4, 5   | Б | 132 |
| 3 | Пряма трикутна призма з висотою 10, основою якої є прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 | В | 48  |
|   |   | Г | 94  |
| 4 | Правильний тетраедр з ребром $4\sqrt{3}$  | Д | 96  |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Розв’яжіть завдання 25–32. Одержані відповіді запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу в зошиті та бланку А (с. 218).

25. Дві прями, відповідно паралельні сторонам паралелограма, ділять паралелограм  $ABCD$  на чотири паралелограми —  $AMKT$ ,  $KMBE$ ,  $KECN$  і  $DTKN$  (див. рисунок). Обчисліть суму периметрів утворених паралелограмів, якщо периметр паралелограма  $ABCD$  дорівнює 24 см.



Відповідь: \_\_\_\_\_

26. Обчисліть значення виразу  $\frac{x^3 - 3x}{x^2 + x\sqrt{3}}$ , якщо  $x = \sqrt{3} - 9$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

27. У ящику містяться три види фруктів: лимони, апельсини та яблука. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний фрукт буде цитрусовим, якщо яблук у ящику в чотири рази більше, ніж інших фруктів.

Відповідь: \_\_\_\_\_

28. Із пункту  $A$  в пункт  $B$  одночасно виїхали два велосипедисти. Швидкість руху першого велосипедиста на 30 км/год більше, ніж швидкість другого, і він приїздить у пункт  $B$  на 3 год раніше. Знайдіть швидкість руху (у км/год) другого велосипедиста, якщо відстань між пунктами  $A$  і  $B$  дорівнює 100 км.

Відповідь: \_\_\_\_\_

29. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною 5 см і меншою діагоналлю 6 см. Бічна грань призми є квадратом. Знайдіть об'єм  $V$  (у см<sup>2</sup>) циліндра, вписаного у призму. У відповідь запишіть  $\frac{V}{\pi}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

30. Знайдіть найбільше значення функції  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$  на проміжку  $[1; 9]$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

31. Виберіть дві нерівності із (1–4) і вставте їх у твердження так, щоб воно було завжди правильним: «Якщо \_\_\_\_\_, то \_\_\_\_\_».

1)  $|x| < 3$ ;      2)  $|x| > 6$ ;      3)  $x > 2$ ;      4)  $x < -7$ ;      5)  $0 < x < 4$ .

Номери вибраних нерівностей запишіть у бланк відповідей у тому порядку, в якому вони вставлені у твердження.

Відповідь: \_\_\_\_\_

32. Знайдіть найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $\frac{1}{2x-a} = \frac{5}{ax+1}$  має ДОДАТНИЙ корінь.

Відповідь: \_\_\_\_\_

## БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ (за специфікацією 2012 р.)

# А

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 25–32 правильну відповідь запишіть, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак «мінус» запишіть в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

**Наприклад:** правильно записане число 2 матиме такий вигляд:

			2		
--	--	--	---	--	--

 чи такий:
 

			2	0	
--	--	--	---	---	--

правильно записане число 2,5 матиме такий вигляд:

			2	,	5
--	--	--	---	---	---

правильно записане число -2,05 матиме такий вигляд:

			-	2	,	0	5
--	--	--	---	---	---	---	---

**НЕправильно** записане число 2,5 має такий вигляд:

2										
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 чи такий:
 

			2	,			5
--	--	--	---	---	--	--	---

У завданнях 1–24 правильну відповідь позначаєте тільки так:

Якщо ви позначили відповідь до котрогось із завдань 1–24 неправильно, то можете її виправити, замалювавши попередню позначку та поставивши нову, як показано на зразку:

	А	Б	В	Г	Д
1	✕	■			
2					
3					
4					

	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д												
1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
5	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				

	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д												
21	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
22	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
23	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
24	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				

Приклад написання цифр: 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

У завданнях 25–32 відповідь запишіть цифрами, враховуючи положення коми.

25	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					27	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
26	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					28	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>						<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>						<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				

### Місце виправлення помилкової відповіді

Щоб виправити відповідь до котрогось із завдань 25–32, запишіть нову відповідь у відповідних клітинках.

25	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					27	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
26	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>					28	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>						<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>						<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td><td style="width: 25px; height: 25px;"></td></tr></table>				

## Тренувальний тест 2 зовнішнього незалежного оцінювання з математики за специфікацією 2012 р.

Завдання 1–20 мають по п'ять варіантів відповідей, серед яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку А (с. 225). Не робіть інших позначок — комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки.

1. У 160 грамах води розчинили 40 грамів солі. Знайдіть процентний вміст солі в розчині.

А	Б	В	Г	Д
0,2 %	0,25 %	2,5 %	20 %	25 %

2. Укажіть рівняння прямої в декартовій системі координат, якщо графік цієї прямої паралельний до графіка функції  $y = -3x + 5$  і проходить через початок координат.

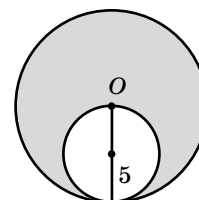
А	Б	В	Г	Д
$y = 3x - 5$	$y = 3x$	$y = -3x$	$y = -3x - 5$	$y = \frac{1}{3}x$

3. Задано геометричну прогресію  $(b_n)$ , для якої четвертий член  $b_4 = 24$ , а п'ятий  $b_5 = 48$ . Знайдіть  $b_1$ .

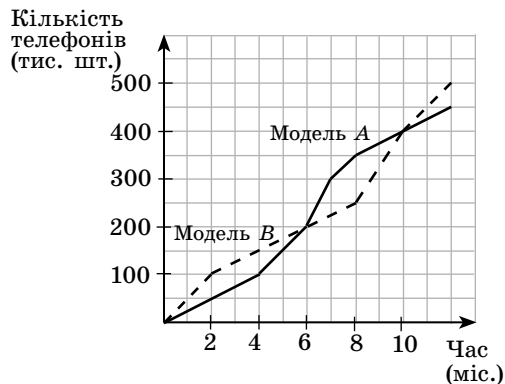
А	Б	В	Г	Д
1,5	3	6	12	192

4. Два кола дотикаються внутрішнім чином, і менше коло проходить через центр більшого (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури, якщо радіус меншого кола дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
$25\pi \text{ см}^2$	$40\pi \text{ см}^2$	$50\pi \text{ см}^2$	$75\pi \text{ см}^2$	$100\pi \text{ см}^2$



5. Фірма «Зв'язок» випустила у продаж дві нові моделі телефонів — модель А і модель В. На графіках показано, як ці моделі продавалися протягом року. На горизонтальній осі відкладено час, який пройшов з початку продаж (у місяцях), а на вертикальній — кількість телефонів, які були продані за цей час (у тис. штук). Визначте, на скільки телефонів моделі А було продано більше, ніж телефонів моделі В, за перші 8 місяців року.



А	Б	В	Г	Д
На 350	На 250	На 200	На 100	На 50

6. Доберіть таке закінчення речення, щоб утворилося правильне твердження.  
«Якщо в трикутній піраміді всі бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи піраміди, то основою висоти піраміди завжди буде...»

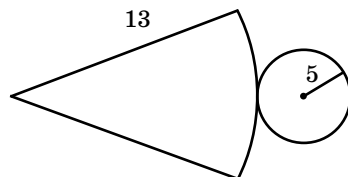
А	Б	В	Г	Д
точка перетину медіан трикутника основи	точка перетину висот трикутника основи	центр кола, вписаного в трикутник основи	центр кола, описаного навколо трикутника основи	середина найбільшої сторони основи

7. Спростіть вираз  $\sqrt[3]{8\sqrt{a^{27}}}$ , якщо  $a > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$a\sqrt{a}$	$a^3\sqrt{a}$	$\sqrt[18]{a}$	$a^3$	$\sqrt{a}$

8. На рисунку зображена розгортка конуса. Знайдіть об'єм конуса.

А	Б	В	Г	Д
$100\pi$	$65\pi$	$300\pi$	$108\frac{1}{3}\pi$	$25\pi$



9. Середнє арифметичне п'яти чисел дорівнює 200. Одне із цих чисел дорівнює 400. Знайдіть середнє арифметичне решти чотирьох чисел.

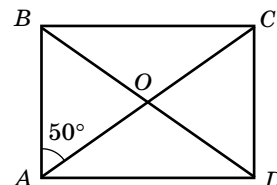
А	Б	В	Г	Д
100	125	150	175	200

10. Знайдіть значення виразу  $\frac{(3x)^4}{x^{-2} \cdot x^5}$  при  $x=5$ .

А	Б	В	Г	Д
16,2	81	135	405	2025

11. У прямокутнику  $ABCD$  кут  $BAC$  дорівнює  $50^\circ$ . Знайдіть величину кута  $COD$ .

А	Б	В	Г	Д
$50^\circ$	$55^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$



12. Обчисліть, чому дорівнює вираз  $\frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ .

А	Б	В	Г	Д
$2\sin^2 \alpha$	$2\cos^2 \alpha$	2	$\cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha$

13. Розв'яжіть нерівність  $\log_{0,6}(x+4) > \log_{0,6} 7$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(-\infty; 11)$	$(-4; 3)$	$(-4; 11)$	$(3; +\infty)$

14. Знайдіть об'єм кулі, якщо площа її поверхні дорівнює  $144\pi$  см<sup>2</sup>.

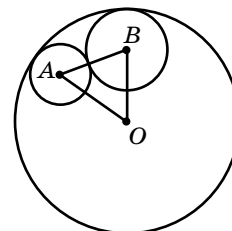
А	Б	В	Г	Д
$864\pi$ см <sup>3</sup>	$72\pi$ см <sup>3</sup>	$48\pi$ см <sup>3</sup>	$144\pi$ см <sup>3</sup>	$288\pi$ см <sup>3</sup>

15. Знайдіть найменше значення функції  $y = 2^{x^2-4x+3} - 6$ .

А	Б	В	Г	Д
-6	-5,5	-5	2	3

16. На рисунку точки  $O$ ,  $A$  і  $B$  є центрами кіл. Кола попарно дотикаються. Чому дорівнює периметр трикутника  $OAB$ , якщо радіус найбільшого з кіл дорівнює 12?

А	Б	В	Г	Д
12	18	24	30	36



17. Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2}{x+2} < \frac{x}{x+2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(0; 1)$	$(-2; 0) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

18. Знайдіть суму коренів (або корінь, якщо він єдиний) рівняння  $(x-2)\sqrt{x^2-5x+4} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
7	5	4	2	1

19. Знайдіть відстань від точки  $A(-8; 6)$  до початку координат.

А	Б	В	Г	Д
10	8	6	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{14}$

20. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані — 12 см. Знайдіть площу основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$25 \text{ см}^2$	$50 \text{ см}^2$	$65 \text{ см}^2$	$144 \text{ см}^2$	$169 \text{ см}^2$

Завдання 21–24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою. Відповіді запишіть у зошиті та бланку А (с. 225): поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види вашого запису в бланку А комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

21. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1  $\frac{x^3+y^3}{x+y}$

2  $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

3  $\frac{(x-y)^4}{x^2-2xy+y^2}$

4  $(x+y)^2 - (x-y)^2$

А  $x^4 - y^4$

Б  $x^2 - 2xy + y^2$

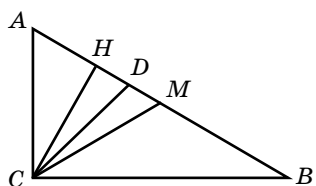
В  $x^2 - xy + y^2$

Г  $x^2 + 2xy + y^2$

Д  $4xy$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

22. У прямокутному трикутнику  $ABC$  (див. рисунок):  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $AB = 20$ ,  $CM$  — медіана,  $CH$  — висота,  $CD$  — бісектриса. Установіть відповідність між відрізками (1–4) та їх довжинами (А–Д).



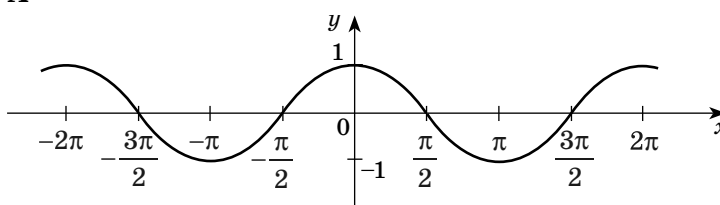
- 1  $CM$
- 2  $CB$
- 3  $CH$
- 4  $CD$

- А 5
- Б 10
- В  $5\sqrt{3}$
- Г  $10\sqrt{3}$
- Д  $15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}$

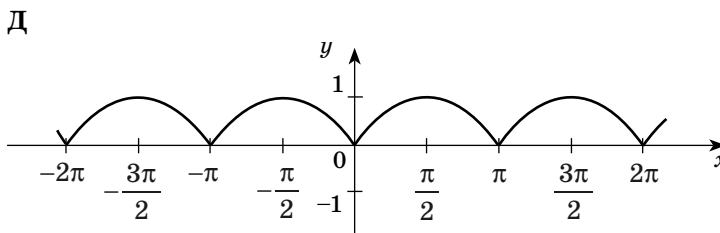
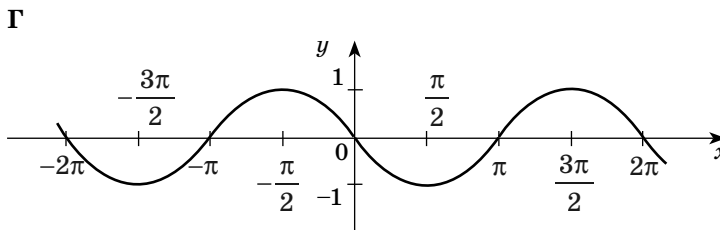
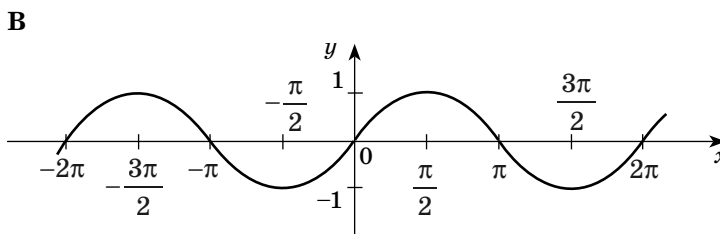
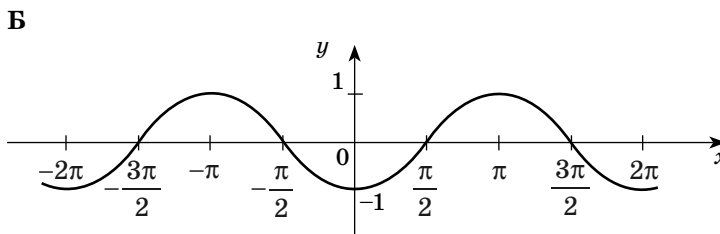
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

23. Установіть відповідність між функціями (1–4) та ескізами їх графіків (А–Д).

- 1  $y = \sin x$     А
- 2  $y = -\sin x$
- 3  $y = -\cos x$
- 4  $y = |\sin x|$



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					





24. Установіть відповідність між многогранниками (1–4) та їх об'ємами (А–Д).

- |   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| 1 | Куб із ребром 4   | А | 9  |
| 2 | Прямокутний паралелепіпед із вимірами 3, 4, 5   | Б | 10 |
| 3 | Пряма трикутна призма, висота якої 10, а основою є прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 | В | 20 |
|   |   | Г | 60 |
| 4 | Правильний тетраедр з ребром $3\sqrt{2}$  | Д | 64 |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Розв'яжіть завдання 25–32. Одержані відповіді запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу в зошиті та бланку А (с. 225).

25. Обчисліть значення виразу  $3^{\log_{81} 16} - 5$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

26. Одночасно кидають три монети. Знайдіть імовірність того, що випаде три «герба».

Відповідь: \_\_\_\_\_

27. Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0, \\ 4^x - 17 \cdot 2^x + 16 \leq 0. \end{cases}$  У відповідь запишіть СУМУ всіх цілих розв'язків системи.

Відповідь: \_\_\_\_\_

28. Навколо кола радіусом 4 описано рівнобічну трапецію, довжина бічної сторони якої дорівнює 10. Знайдіть площу трапеції.

Відповідь: \_\_\_\_\_

29. Знайдіть найбільше значення функції  $y = x^3 - 12x + 1$  на відрізку  $[-3; 0]$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

30. Протягом 7 год 20 хв катер пройшов по річці 35 км і повернувся в початковий пункт. Швидкість течії дорівнює 4 км/год. Знайдіть швидкість (у км/год), з якою катер ішов за течією.

Відповідь: \_\_\_\_\_

31. Знайдіть найбільше значення параметра  $a$ , при якому має розв'язки рівняння  $\cos x - \sin^2 x = a - 1$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

32. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб з стороною 6 см і гострим кутом  $30^\circ$ , вписано кулю. Знайдіть площу  $S$  (у  $\text{см}^2$ ) поверхні кулі, якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом  $60^\circ$ . У відповіді запишіть значення  $\frac{S}{\pi}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

## БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ (за специфікацією 2012 р.)

# А

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 25–32 правильну відповідь записуйте, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак «мінус» записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

**Наприклад:** правильно записане число 2 матиме такий вигляд:

		2	,		
		2	,	5	

чи такий: 

		2	,	0	
--	--	---	---	---	--

правильно записане число 2,5 матиме такий вигляд:

		2	,	5			
		-	2	,	0	5	

правильно записане число -2,05 матиме такий вигляд:

		-	2	,	0	5	
--	--	---	---	---	---	---	--

**НЕправильно** записане число 2,5 має такий вигляд: 

2			,	5	
---	--	--	---	---	--

чи такий: 

		2	,		5
--	--	---	---	--	---

У завданнях 1–24 правильну відповідь позначаєте тільки так:

Якщо ви позначили відповідь до котрогось із завдань 1–24 неправильно, то можете її виправити, замалювавши попередню позначку та поставивши нову, як показано на зразку:

А Б В Г Д				
1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

А Б В Г Д					А Б В Г Д					А Б В Г Д					А Б В Г Д				
1					6					11					16				
2					7					12					17				
3					8					13					18				
4					9					14					19				
5					10					15					20				

А Б В Г Д					А Б В Г Д					А Б В Г Д					А Б В Г Д				
21	1				22	1				23	1				24	1			
	2					2					2					2			
	3					3					3					3			
	4					4					4					4			

Приклад написання цифр: 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

У завданнях 25–32 відповідь записуйте цифрами, враховуючи положення коми.

25				,			27				,			29				,		31				,		
26				,			28				,			30				,		32				,		

### Місце виправлення помилкової відповіді

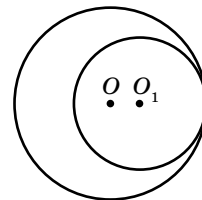
Щоб виправити відповідь до котрогось із завдань 25–32, запишіть нову відповідь у відповідних клітинках.

25				,			27				,			29				,		31				,		
26				,			28				,			30				,		32				,		

## Тренувальний тест 3 зовнішнього незалежного оцінювання з математики за специфікацією 2012 р.

Завдання 1–20 мають по п'ять варіантів відповідей, серед яких лише одна відповідь є правильною. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку А (с. 233). Не робіть інших позначок — комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки.

1. Два кола з центрами точках  $O$  і  $O_1$  мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань  $OO_1$  якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см.

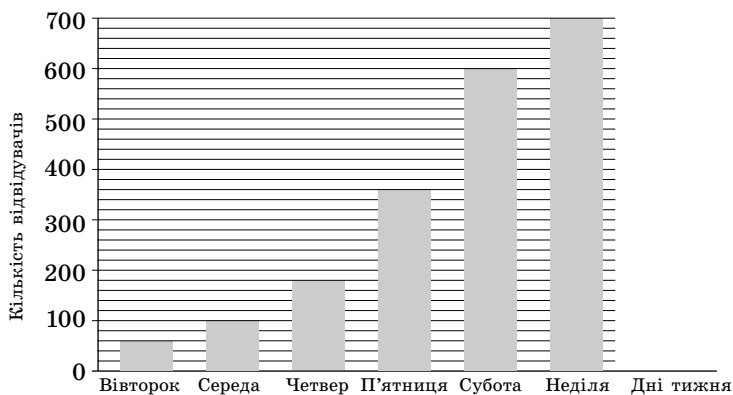


А	Б	В	Г	Д
4 см	3 см	2 см	1,5 см	8 см

2. Знайдіть область визначення функції  $y = 2 - \frac{1}{x}$ .

А	Б	В
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$
Г		Д
$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		$(0; \frac{1}{2})$

3. На діаграмі відображено кількість відвідувачів Музею Води протягом одного робочого тижня (з вівторка до неділі). У який день тижня кількість відвідувачів була вдвічі більшою, ніж у попередній день?

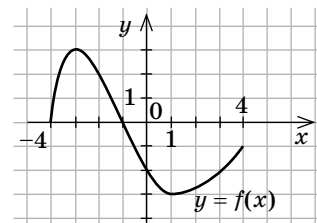


А	Б	В	Г	Д
середа	четвер	п'ятниця	субота	неділя

4. Яка з наведених точок належить осі  $Oz$  прямокутної системи координат у просторі?

А	Б	В	Г	Д
$M(0; -3; 0)$	$N(3; 0; -3)$	$K(-3; 0; 0)$	$L(-3; 3; 0)$	$F(0; 0; -3)$

5. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ , визначеної на проміжку  $[-4; 4]$ . Знайдіть множину всіх значень  $x$ , для яких  $f(x) \leq -2$ .

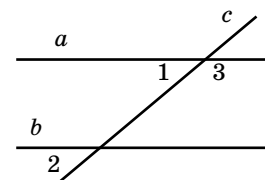


А	Б	В	Г	Д
$[-3; -2]$	$[-3; 2]$	$[-1; 4]$	$[0; 3]$	$[-4; 0]$

6. Два фахівці розробили макет рекламного оголошення. За роботу вони отримали 5000 грн, розподіливши гроші таким чином: перший отримав четверту частину зароблених грошей, а другий — решту. Скільки гривень отримав за цю роботу другий фахівець?

А	Б	В	Г	Д
4000 грн	3750 грн	3000 грн	1250 грн	1000 грн

7. Пряма  $c$  перетинає паралельні прямі  $a$  і  $b$  (див. рисунок). Які з наведених тверджень є правильними для кутів 1, 2, 3?



I  $\angle 1$  і  $\angle 3$  — суміжні.

II  $\angle 1 = \angle 2$ .

III  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і III	лише III	лише I і II	I, II та III

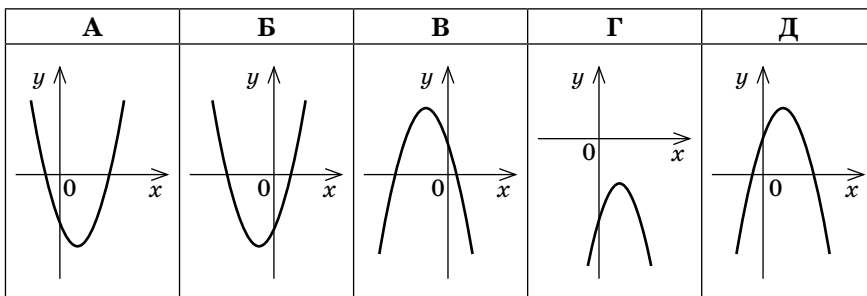
8. Запишіть числа  $\sqrt[3]{2}$ , 1,  $\sqrt[5]{3}$  в порядку зростання.

А	Б	В	Г	Д
$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}$	$\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[5]{3}$	$\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, 1$	$\sqrt[5]{3}, 1, \sqrt[3]{2}$	$1, \sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}$

9. При якому значенні  $x$  вектори  $\vec{a}(2; x)$  і  $\vec{b}(-4; 10)$  перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
-5	-0,8	0,8	5	20

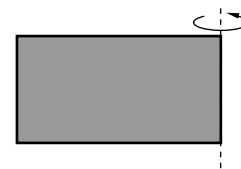
10. На якому з наведених рисунків зображено ескіз графіка функції  $y = 4 - (x - 1)^2$ ?



11. У залі кінотеатру 18 рядів. У першому ряду знаходяться 7 місць, а в кожному наступному ряду на 2 місця більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у цьому залі?

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
369	432	438	450	864

12. Прямокутник із сторонами 8 см і 10 см обертається навколо меншої сторони (див. рисунок). Знайдіть площу повної поверхні отриманого тіла обертання.



<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$800\pi \text{ см}^2$	$360\pi \text{ см}^2$	$288\pi \text{ см}^2$	$260\pi \text{ см}^2$	$160\pi \text{ см}^2$

13. Якому проміжку належить значення виразу  $\sin 410^\circ$ ?

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$

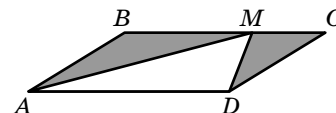
14. З міст А і В, відстань між якими по шосе становить 340 км, одночасно назустріч один одному виїхали автобус і маршрутне таксі зі сталими швидкостями 65 км/год і 80 км/год відповідно. Автобус і маршрутне таксі рухаються без зупинок і ще не зустрілися. За якою формулою можна обчислити відстань  $s$  (у км) між автобусом і маршрутним таксі по шосе через  $t$  годин після початку руху?

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$s = 340 - 145t$	$s = 340 - 15t$	$s = 15t - 340$	$s = 145t - 340$	$s = 340 + 145t$

15. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема — 5 см. Визначте косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$

16. На рисунку зображено паралелограм  $ABCD$ , площа якого дорівнює  $60 \text{ см}^2$ . Точка  $M$  належить стороні  $BC$ . Визначте площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників.



А	Б	В	Г	Д
$20 \text{ см}^2$	$45 \text{ см}^2$	$35 \text{ см}^2$	$40 \text{ см}^2$	$30 \text{ см}^2$

17. Розв'яжіть нерівність  $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$	$(-\infty; -3)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

18. У прямокутнику  $ABCD$ :  $BC = 80$ ,  $AC = 100$ . Через точки  $M$  і  $K$ , що належать сторонам  $AB$  і  $BC$  відповідно, проведено пряму, паралельну  $AC$ . Знайдіть довжину більшої сторони трикутника  $MVK$ , якщо  $BK = 20$ .

А	Б	В	Г	Д
60	50	30	25	15

19. Укажіть множину всіх значень  $a$ , при яких виконується рівність  $|a^3 - a^2| = a^3 - a^2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup \{0\}$	$[0; 1]$	$\{0\} \cup [1; +\infty)$

20. Функція  $f(x)$  має в точці  $x_0$  похідну  $f'(x_0) = -4$ . Визначте значення похідної функції  $g(x) = 2f(x) + 7x - 3$  в точці  $x_0$ .

А	Б	В	Г	Д
15	12	-1	-4	-8

Завдання 21–24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений буквою. Відповіді запишіть у зошиті та бланку А (с. 233): поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види вашого запису в бланку А комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

21. До кожного виразу (1– 4) при  $a > 0$  доберіть тотожно йому рівний (А–Д).

1	$\frac{2a^5}{a^6}$	А	$2a^{-1}$	А	Б	В	Г	Д
2	$(2a)^5 \cdot a^6$	Б	$2a^{\frac{6}{5}}$	1				
3	$(2a^6)^5$	В	$2a^{\frac{5}{6}}$	2				
4	$\sqrt[6]{64a^5}$	Г	$32a^{30}$	3				
		Д	$32a^{11}$	4				

22. Кожній точці (1–4) поставте у відповідність функцію (А–Д), графіку якої належить ця точка.

1	$K(0; 1)$	А	$y = 2x + 2$	А	Б	В	Г	Д
2	$N(-1; 0)$	Б	$y = \text{ctg } x$	1				
3	$O(0; 0)$	В	$y = \text{tg } x$	2				
4	$M(0; -1)$	Г	$y = \sqrt{x} - 1$	3				
		Д	$y = 2^x$	4				

23. Розв'яжіть рівняння (1–4). Установіть відповідність між кожним рівнянням та кількістю його коренів (А–Д) на відрізку  $[-5; 5]$ .

1	$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	А	жодного	А	Б	В	Г	Д
2	$\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 8} = 0$	Б	один	1				
3	$\log_3 x = -2$	В	два	2				
4	$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$	Г	три	3				
		Д	чотири	4				

24. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Пряма $A_1 B$	А	паралельна площині $AA_1 B_1 B$ .	А	Б	В	Г	Д
2	Пряма $AC$	Б	перпендикулярна площині $AA_1 B_1 B$ .	1				
3	Пряма $CD_1$	В	належить площині $AA_1 B_1 B$ .	2				
4	Пряма $CB$	Г	має з площиною $AA_1 B_1 B$ лише дві спільні точки.	3				
		Д	утворює з площиною $AA_1 B_1 B$ кут $45^\circ$ .	4				

Розв'яжіть завдання 25–32. Одержані відповіді запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу в зошиті та бланку А (с. 233).

25. Батьки разом із двома дітьми: Марійкою (4 роки) та Богданом (7 років) — збираються провести вихідний день у парку атракціонів. Батьки дозволяють кожній дитині відвідати не більше трьох атракціонів і кожний атракціон — лише по одному разу. Відомо, що на атракціони «Електричні машинки» і «Веселі гірки» допускають лише дітей старше 6 років. На «Паровозик» Богдан не піде. Для відвідування будь-якого атракціону необхідно купити квиток для кожної дитини. Скориставшись таблицею, визначте МАКСИМАЛЬНУ суму коштів (у грн), що витратять батьки на придбання квитків для дітей.

Назва атракціону	Вартість 1 квитка для 1 дитини, грн
Веселі гірки	17
Паровозик	16
Електричні машинки	20
Карусель	12
Батут	14
Дитяча рибалка	8
Лебеді	13

Відповідь: \_\_\_\_\_

26. Скільки існує різних дробів  $\frac{m}{n}$ , якщо  $m$  набуває значень 1; 2; 3 або 4, а  $n$  набуває значень 5; 7; 11 або 17?

Відповідь: \_\_\_\_\_

27. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} y - x = 12, \\ \frac{x + 8}{2y - 5} = 2. \end{cases}$  Запишіть у відповідь ДОБУТОК  $x_0 \cdot y_0$ , якщо пара  $(x_0; y_0)$  є розв'язком цієї системи рівнянь.

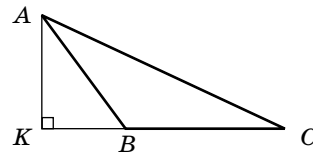
Відповідь: \_\_\_\_\_

28. Обчисліть значення виразу  $\log_a 500 - \log_a 4$ , якщо  $\log_5 a = \frac{1}{6}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

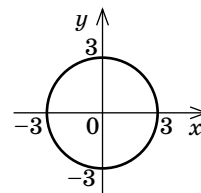


29. У трикутнику  $ABC$  основа висоти  $AK$  лежить на продовженні сторони  $BC$  (див. рисунок),  $AK = 6$ ,  $KB = 2\sqrt{3}$ . Радіус описаного навколо трикутника  $ABC$  кола дорівнює  $14\sqrt{3}$ . Визначте довжину  $AC$ .



Відповідь: \_\_\_\_\_

30. Обчисліть  $\frac{1}{\pi} \int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx$ , використовуючи рівняння кола  $x^2 + y^2 = 9$ , зображеного на рисунку.



Відповідь: \_\_\_\_\_

31. Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є рівнобічна трапеція  $ABCD$ . Основа  $AD$  трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу  $BC$ . Через бічне ребро  $CC_1$  призми проведено площину паралельно ребру  $AB$ . Знайдіть площу утвореного перерізу (у  $\text{см}^2$ ), якщо об'єм призми дорівнює  $756 \text{ см}^3$ , а її висота —  $9 \text{ см}$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

32. При якому **НАЙМЕНШОМУ ЦІЛОМУ** значенні параметра  $a$  рівняння  $\sqrt{2x+13} \cdot (\sqrt{x^2+16x+64} - \sqrt{x^2-10x+25}) = a\sqrt{2x+13}$  має лише два різні корені?

Відповідь: \_\_\_\_\_

## БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ (за специфікацією 2012 р.)

# А

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 25–32 правильну відповідь записуйте, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак «мінус» записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

**Наприклад:** правильно записане число 2 матиме такий вигляд: 

	2	
--	---	--

 чи такий: 

	2	0
--	---	---

правильно записане число 2,5 матиме такий вигляд: 

	2	,	5
--	---	---	---

правильно записане число –2,05 матиме такий вигляд: 

–	2	,	0	5
---	---	---	---	---

**Неправильно** записане число 2,5 має такий вигляд: 

2		,	5
---	--	---	---

 чи такий: 

	2		5
--	---	--	---

У завданнях 1–24 правильну відповідь позначаєте тільки так:

Якщо ви позначили відповідь до котрогось із завдань 1–24 неправильно, то можете її виправити, замалювавши попередню позначку та поставивши нову, як показано на зразку:

	А	Б	В	Г	Д
1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>1</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>2</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>3</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>4</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>5</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>6</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>7</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>8</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>9</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>10</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>11</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>12</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>13</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>14</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>15</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>16</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>17</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>18</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>19</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>20</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
А	Б	В	Г	Д																																																																																																																							
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
А	Б	В	Г	Д																																																																																																																							
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
А	Б	В	Г	Д																																																																																																																							
11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
А	Б	В	Г	Д																																																																																																																							
16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							
20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																																							

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>21</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>2</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>3</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>4</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>22</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>2</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>3</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>4</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>23</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>2</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>3</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>4</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr> <tr><td>24</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>2</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>3</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> <tr><td>4</td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td></tr> </table>	А	Б	В	Г	Д	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
А	Б	В	Г	Д																																																																																																			
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
А	Б	В	Г	Д																																																																																																			
22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
А	Б	В	Г	Д																																																																																																			
23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
А	Б	В	Г	Д																																																																																																			
24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																																			

Приклад написання цифр: 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

У завданнях 25–32 відповідь записуйте цифрами, враховуючи положення коми.

25	27	29	31

### Місце виправлення помилкової відповіді

Щоб виправити відповідь до котрогось із завдань 25–32, запишіть нову відповідь у відповідних клітинках.

25	27	29	31

## Відповіді до тестових завдань

### Розділ 1. ЧИСЛА ТА ВИРАЗИ

Завдання	2	4	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17	19	20	22	23	25	26	27	28	30
Відповідь	Д	Д	Г	Д	Д	В	Г	В	А	Д	Д	Д	Б	Г	Б	А	А	Г	А	В	Г

Завдання	32	33	34	35	36	37	38	40	42	43	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Відповідь	А	В	Г	Г	В	В	А	Г	В	Б	Г	А	Б	Д	А	Г	Д	В	Г

Завдання	54	56	57	58	59	61	62	63	64	66	67	69	70	71	72	73	74	75	76
Відповідь	Б	А	Б	Г	А	В	В	Д	Г	А	Г	А	Б	Б	В	Д	В	А	Г

Завдання	77	78	80	81	82	83	84	85	86	87	90	91	92	93	94	95	96	97	98
Відповідь	Г	А	В	Г	Б	Д	А	Б	1,06	-4	4	4	7	155	44	-8	144	44	-0,2

Завдання	99	100	101	102	103	104	105	106	108	109	110	111	112	113	114
Відповідь	-2,5	3	2	-0,96	0,5	0,5	2	-0,8	3	4	1,5	2	4	1	28

Завдання	115										116									
Відповідь	1—Д; 2—Г; 3—В; 4—А										1—Д; 2—А; 3—В; 4—Б									

### Розділ 2. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Завдання	2	4	5	6	7	9	10	11	13	15	16	17	18	19	20	22	23	24	25	26
Відповідь	Б	В	Г	Д	Б	Б	Г	В	Г	А	Б	В	В	В	Д	В	Б	В	Б	А

Завдання	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	42	43	44	45	46
Відповідь	Д	Г	Б	Г	В	В	Б	Д	Б	Г	В	Б	А	Д	Г	В	Г	А	В

Завдання	47	48	49	51	53	54	55	56	57	58	60	61	62	63	64	65	66
Відповідь	А	Г	Б	Б	-1	3	-3	-1,5	1	12	1	41	200	3	500	1,5	20

Завдання	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	80	81	82	83	84	85	87
Відповідь	15	15	30	60	400	2	-2	-2	19	3	6	-7	-4	-3	4	1	-1	3	1

Завдання	88	89	90	91	92	93	95	96	97	98	99	100	101							
Відповідь	2	-4	4	5	3	11	3	64	6	-5	6	20	1—Б; 2—В; 3—А; 4—Г							

## Розділ 3. ФУНКЦІЇ

Завдання	2	4	7	8	9	11	12	14	15	16	22	23	24	25	26	28	30	31	32	33
Відповідь	Г	Б	Г	А	Б	В	В	Д	Б	В	В	Г	Д	Г	Б	Б	Б	Б	Г	Б

Завдання	34	35	36	38	41	42	43	44	45	46	47	48	49	51	52
Відповідь	Б	А	Б	4	3	1	66	2	-12	8	4	9	18	1	2

Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ  
ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ

Завдання	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Відповідь	Г	Д	Д	А	Г	Г	Б	Г	Г	Д	В	В	Д	Б	Г	Д	9	0,1	31	15	0,75

## Розділ 5. ГЕОМЕТРІЯ

## ПЛАНІМЕТРІЯ

Завдання	2	3	4	5	7	8	10	11	12	14	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26
Відповідь	Д	А	Г	Б	Д	Д	Б	А	Б	Г	Б	Б	Г	Б	А	Д	Г	Б	В	Г

Завдання	27	29	30	31	32	33	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Відповідь	А	Г	Д	Б	Д	В	В	Д	В	Г	Г	Д	Б	А	Б	В	В	В	Б

Завдання	50	51	52	53	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
Відповідь	А	10,625	5	25	3	45	8	25	120	5	5	54	40	45	5	68	39	14

Завдання	69	70	71	72	73	74	75
Відповідь	36	24	1,5	30	28	16	18

## СТЕРЕОМЕТРІЯ

Завдання	2	4	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16	18	19	20	21	22	24	25	27
Відповідь	Г	Б	Д	Б	В	Г	А	Д	Б	Д	А	Г	А	Г	Д	В	Б	Г	В	А

Завдання	28	29	30	32	33	34	35	36	38	39	40	41	43	44	45	46	47	48
Відповідь	Б	В	Г	Д	В	Д	10	6	200	540	90	5	6	7,5	6	0,75	21	4,2

Завдання	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
Відповідь	2	9	20	32	20	108	30	15	40	48	8	180	2	40	1	60	9	3

Завдання	67	68	69	70	71	72	73	74	76	79	80	81	82
Відповідь	3	36	24	12	0,5	12	0,8	3,2	8	12	45	0,5	312

Завдання	84	85	86	87	88
Відповідь	28	320	4,8	2	24

**РОЗДІЛ 6. ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ**

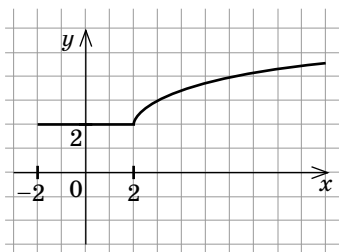
**Тренувальний тест ЗНО з математики за специфікацією 2009 р.**

Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	Б	В	А	Г	А	Б	Г	В	В	Б	В	Г	Д	Г	В	Б	Д	А	В	Д

Завдання	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Відповідь	4	60	7	16	-2	20	15	4,5	336	72

31.  $\frac{9a^2}{32}$ .

32.



33. (2; 4).

## Тренувальний тест ЗНО з математики за специфікацією 2010 р.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	В	Б	Д	В	Д	Б	А	Г	Д	Д	Г	Д	В	Б	А	В	Г	Д	Б	А

Завдання	21	22	23	24	25	26	27	28
Відповідь	Г	Д	Г	Б	В	1—Б; 2—А; 3—Д; 4—В	1—В; 2—Б; 3—А; 4—Г	1—Г; 2—Д; 3—А; 4—В

Завдання	29	30	31	32	33	34	35	36
Відповідь	1	16	15	54	25,6	-9	2	16

## Тренувальний тест ЗНО з математики за специфікацією 2011 р.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	Г	Б	А	Д	В	Б	Г	Д	А	Г	А	В	Д	А	Г	В	Б	Д	В	Г

Завдання	21	22	23	24	25	26	27	28
Відповідь	Б	Д	А	В	В	1—Г; 2—Б; 3—Д; 4—А	1—В; 2—Д; 3—А; 4—Б	1—А; 2—В; 3—Г; 4—Б

Завдання	29	30	31	32	33	34	35
Відповідь	-9	18,25	2,5	7	72	27	-3,5

## Тренувальний тест 1 ЗНО з математики за специфікацією 2012 р.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	Г	Б	Г	Б	В	Г	Д	В	А	Д	Г	В	Г	Б	Б	Г	Д	Г	Б	В

Завдання	21	22	23	24
Відповідь	1—Б; 2—В; 3—Д; 4—А	1—Д; 2—Б; 3—Г; 4—В	1—Б; 2—Д; 3—Г; 4—А	1—Д; 2—Г; 3—Б; 4—В

Завдання	25	26	27	28	29	30	31	32
Відповідь	48	-9	0,2	20	28,8	0,25	42	9

## Тренувальний тест 2 ЗНО з математики за специфікацією 2012 р.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	Г	В	Б	Г	Г	Г	А	А	В	Г	Г	Б	В	Д	Б	В	Д	Б	А	А

Завдання	21					22					23					24				
Відповідь	1—В; 2—А; 3—Г; 4—Д					1—Б; 2—Г; 3—В; 4—Д					1—В; 2—Г; 3—Б; 4—Д					1—Д; 2—Г; 3—В; 4—А				

Завдання	25	26	27	28	29	30	31	32
Відповідь	-3	0,125	10	80	17	15	2	3

## Тренувальний тест 3 ЗНО з математики за специфікацією 2012 р.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	А	Г	В	Д	Г	Б	Д	Д	В	Д	Б	Б	Г	А	А	Д	А	Г	Д	В

Завдання	21					22					23					24				
Відповідь	1—А; 2—Д; 3—Г; 4—Б					1—Д; 2—А; 3—В; 4—Г					1—А; 2—В; 3—Б; 4—Г					1—В; 2—Д; 3—А; 4—Б				

Завдання	25	26	27	28	29	30	31	32
Відповідь	94	16	-20	18	42	2,25	117	-9

## Зміст

Передмова ..... 3

### Розділ 1. ЧИСЛА ТА ВИРАЗИ

**Основні поняття, формули, властивості до розділу 1 «Числа та вирази»**

Таблиця 1. Основні властивості рівностей і нерівностей. ....	7
Таблиця 2. Звичайні дроби. ....	8
Таблиця 3. Подільність цілих чисел і ознаки подільності. ....	9
Таблиця 4. Прості та складені числа. ....	10
Таблиця 5. Пропорції. ....	11
Таблиця 6. Відсотки. ....	12
Таблиця 7. Модуль числа. ....	12
Таблиця 8. Дії над числами з однаковими та різними знаками. ....	14
Таблиця 9. Степені. ....	14
Таблиця 10. Одночлени та дії над ними. ....	15
Таблиця 11. Многочлени. ....	16
Таблиця 12. Розклад алгебраїчних виразів на множники. ....	17
Таблиця 13. Корінь $n$ -го степеня та його властивості. ....	18
Таблиця 14. Властивості логарифмів. ....	20
Таблиця 15. Тригонометричні формули. ....	21
Таблиця 16. Прогресії. ....	23

**Тестові завдання до розділу 1 «Числа та вирази» ..... 25**

### Розділ 2. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

**Основні поняття, формули, властивості до розділу 2 «Рівняння та нерівності»**

Таблиця 17. Рівняння. ....	43
Таблиця 18. Лінійні рівняння. ....	43
Таблиця 19. Квадратні рівняння. ....	44
Таблиця 20. Рівняння, які зводяться до квадратних. ....	46
Таблиця 21. Дробові раціональні рівняння. ....	47
Таблиця 22. Рівняння та нерівності. ....	48
Таблиця 23. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь. ....	51
Таблиця 24. Тригонометричні рівняння. ....	52
Таблиця 25. Показникові рівняння. ....	53
Таблиця 26. Розв'язування більш складних показникових рівнянь та їх систем. ....	54
Таблиця 27. Розв'язування показникових нерівностей. ....	55
Таблиця 28. Розв'язування логарифмічних рівнянь. ....	56

Таблиця 29. Розв'язування логарифмічних нерівностей. .... 58

Таблиця 30. Системи рівнянь ..... 60

**Тестові завдання до розділу 2 «Рівняння та нерівності» ..... 63**

### Розділ 3. ФУНКЦІЇ

**Основні поняття, формули, властивості до розділу 3 «Функції»**

Таблиця 31. Поняття функції та графіку. ....	82
Таблиця 32. Знаходження області визначення функції. ....	83
Таблиця 33. Властивості функцій. ....	83
Таблиця 34. Властивості та графіки основних видів функцій. ....	84
Таблиця 35. Перетворення графіка функції $y = f(x)$ . ....	86
Таблиця 36. Графік функції $y = \sin x$ та її властивості. ....	88
Таблиця 37. Графік функції $y = \cos x$ та її властивості. ....	88
Таблиця 38. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ та її властивості. ....	89
Таблиця 39. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ та її властивості. ....	90
Таблиця 40. Степенева функція, її властивості та графіки. ....	91
Таблиця 41. Показникова функція, її властивості та графіки. ....	93
Таблиця 42. Логарифмічна функція, її властивості та графік. ....	93
Таблиця 43. Похідна. ....	94
Таблиця 44. Застосування похідної для знаходження проміжків зростання і спадання функції та екстремумів функції. ....	96

**Тестові завдання до розділу 3 «Функції» ..... 98**

### Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ

**Основні поняття, формули, властивості до розділу 4. «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики»**

Таблиця 45. Елементи комбінаторики. ....	109
Таблиця 46. Поняття ймовірності випадкової події. ....	111





# Якісна підготовка до ЗНО-2013

## ВИПУСКНИКИ ТА АБІТУРІЄНТИ!

Видавництво «Літера ЛТД» пропонує комплект видань для успішної підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання



### ЕКСПРЕС-ПІДГОТОВКА

- Основні поняття, формули, властивості в опорних таблицях
- Методи та приклади розв'язання
- Типові тестові завдання за темами курсу
- Три тести у форматі ЗНО
- Відповіді до ВСІХ завдань



### КОМПЛЕКСНЕ ВИДАННЯ

- Докладний довідник
- Аналіз найпоширеніших помилок
- 14 тестів у форматі ЗНО
- Розв'язання найбільш складних завдань
- Відповіді до ВСІХ завдань



### ТИПОВІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

- 12 тестів у форматі ЗНО
- Бланки відповідей до кожного тесту
- Розв'язання, вказівки до виконання завдань
- Відповіді до ВСІХ завдань
- Короткий математичний довідник

Історія України

Українська мова  
і література

Біологія

Хімія

Географія

МАТЕМАТИКА

Фізика

Англійська мова

Німецька мова

Понад 480 000 випускників,  
які користувалися комплектом  
видань для підготовки до ЗНО,  
сьогодні є студентами ВНЗ

ISBN 978-966-178-393-4

